

**PROBLEMA DE ENCAIXE DE FIGURAS NÃO CONVEXAS EM
UM CONTORNO NÃO CONVEXO**

Dissertação

Eng. Cesar Augusto do Canto Vinadé

1997

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**PROBLEMA DE ENCAIXE DE FIGURAS NÃO CONVEXAS EM
UM CONTORNO NÃO CONVEXO**

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para
Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Cesar Augusto do Canto Vinadé

Florianópolis, outubro de 1997.

**Problema de Encaixe de Figuras Não Convexas em Um Contorno Não
Convexo**

Cesar Augusto do Canto Vinadé

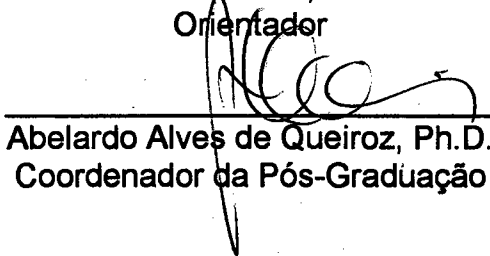
Esta Dissertação foi Julgada Adequada para Obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

**Especialidade Engenharia Mecânica, Área de Concentração Projeto de
Sistemas Mecânicos com Ênfase em CAD, Aprovada em sua Forma Final
pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**



Altamir Dias, Dr.
Orientador



Abelardo Alves de Queiroz, Ph.D.
Coordenador da Pós-Graduação

Banca Examinadora:



Edison da Rosa, Dr.
Presidente



João Carlos Espíndola Ferreira, Ph.D.
Membro



Adroaldo Raizer, Dr.
Membro

DEDICATÓRIA

À minha família

AGRADECIMENTOS

Ao professor Altamir Dias, pela orientação para elaboração desta dissertação.
À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade e apoio para realização deste trabalho.

Ao sr. Nilton Reinert, por fornecer material para testar o algoritmo resultante desta dissertação e também pelo incentivo.

Ao professor Abelardo Alves de Queiroz pela cooperação para realização deste trabalho.

Aos profissionais Elmar Neumann e João Batista do SENAI de São João Batista/SC, por fornecerem material e orientação a respeito do processo de corte de couro.

Aos profissionais Maurí e Luiz Augusto do SENAI-CTCCA de Novo Hamburgo/RS, pelo fornecimento de material e incentivo.

Aos colegas Felipe Schneider e Rafael Piassa pela assistência na digitalização do couro e dos moldes.

Ao Marcelo Cúrcio, amigo, companheiro e conselheiro, enfim um verdadeiro irmão em Florianópolis.

Aos amigos Eduardo Barbeitos, Cristiano, Jorge Euríco, Lucas, Marcelo Gitirana e Marcus, pelo companheirismo e motivação nas horas difíceis.

Aos colegas Clodoaldo, Fred, João Carlos e Raimundo Ricardo, pela acolhida e companheirismo.

Para minhas amigas e companheiras: Ana Vladia, Rafaela e Renata.

Aos professores dos laboratórios Grante e LP, pela cooperação e amizade.

Aos demais amigos da UFSC que sempre torceram por mim e estiveram ao meu lado.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica.....	2
1.2	Definições Básicas.....	4
1.3	Descrição do Trabalho.....	6
2	Base para um Algoritmo de Encaixe	7
2.1	Introdução.....	7
2.2	Características Geométricos das Peças e Regiões de Encaixe.....	7
2.3	Heurísticas.....	10
2.3.1	Ordenação do Conjunto de Peças.....	11
2.3.2	Estratégia de Posicionamento.....	11
2.3.3	Uso de Faixas para Geração de Encaixe.....	13
2.4	Discretização das Peças e Região de Encaixe.....	14
3	Algoritmo de Encaixe em Região Retangular	19
3.1	Introdução.....	19
3.2	Método de Intersecção de Matrizes.....	19
3.3	Método de Deslizamento de Peças.....	21
3.3.1	Função D.....	22
3.3.2	Testes de Intersecção Usando a Função.....	23
3.3.3	Processo de Posicionamento de Figuras por Deslizamento.....	24
a)	Faixa de Deslizamento.....	25
b)	Seleção das Figuras Potencialmente Interceptoras.....	26
c)	Seleção das Arestas Interceptantes.....	27
4	Encaixe em Contorno Não Convexo	29
4.1	Introdução.....	29
4.2	Encaixe por Intersecção de Matrizes.....	29
4.2.1	Geração de Matrizes.....	30
4.2.2	Deteção de Superposição.....	31

4.2.3	Teste de Intersecção com Segmentos de Retas Paramétricos.....	33
4.2.4	Uso do Raio que Circunscreve a Peça.....	35
4.2.5	Otimização do Posicionamento da Peça na Matriz de Bits do Plano de Encaixe.....	36
4.3	Encaixe por Deslizamento.....	37
4.3.1	Teste de Intersecção pelo uso da Técnica de Cyrus-Beck.....	38
4.3.2	Otimização no Encaixe por Deslizamento.....	41
4.4	Colocação das Peças no Região de Encaixe.....	42
4.4.1	Definição da Orientação da Peça no Encaixe.....	43
4.4.2	Encaixe de Peças do mesmo Tipo.....	45
4.4.3	Encaixe em Regiões com Defeitos ou Furos.....	46
4.4.4	Colocação de Peças em Áreas Específicas.....	50
5	Resultados e Discussão	53
5.1	Introdução.....	53
5.2	Dados dos Moldes e do Infesto.....	53
5.3	Testes de Encaixe sem Áreas Defeituosas.....	56
5.3.1	Influência da Variação na Rotação da Peça.....	66
5.3.2	Busca pelo Maior Número de Pares de Sapatos Encaixados.....	69
5.4	Testes de Encaixe com Furos ou Áreas Defeituosas.....	73
5.5	Testes de Encaixe de Moldes em Áreas Pré-Definidas.....	78
6	Conclusões e Sugestões	82
A	Apêndice	86
A.1	Fluxograma Geral do Algoritmo de Encaixe em Contorno Não Convexo.....	86
A.2	Fluxograma de Preparação de Dados.....	88
A.3	Fluxograma para Intersecção de Matrizes.....	90
A.4	Fluxograma de Deslizamento.....	92
A.5	Fluxograma de Seleção de Arestas e Vértices Interceptantes.....	94
A.6	Fluxograma da Rotina Baseada na Técnica Cyrus-Beck	96
B	Apêndice	98
B.1	Dados Geométricos das Peças e Plano de Encaixe.....	98
	Referência Bibliográfica	104

Lista de Figuras

1.1	Polígono convexo.....	4
1.2	Polígono não convexo.....	4
1.3	Tipos de preenchimentos.....	5
2.1	Representação da peça.....	8
2.2	Esquema da estrutura de dados.....	8
2.3	Ponto interno de referência.....	9
2.4	Exemplo de varredura.....	12
2.5	Definição da faixa preferencial de encaixe.....	14
2.6	a) Retângulo envolvente do plano de encaixe.	
	b) Matriz de bits.....	16
2.7	Matriz de bits do infesto.....	17
2.8	Matriz de bits da peça.....	17
2.9	Matriz de bits com infesto e peças encaixadas.....	18
3.1	Discretização de uma peça.....	20
3.2	Exemplo do efeito escada.....	21
3.3	Elementos de cálculo da distância do ponto P à reta AB.....	23
3.4	Intersecção das retas AB e CD e os respectivos sinais da função D.....	24
3.5	Exemplo de encaixe por deslizamento.....	24
3.6	Exemplo de faixa de deslizamento.....	26
3.7	Exemplo de arestas interceptantes.....	28
4.1	Seqüência de discretização.....	31
4.2	Superposição entre peças 1 e 2.....	32
4.3	Valores do parâmetro t.....	33
4.4	Intersecção entre duas retas.....	34
4.5	Peça percorre todo o retângulo que envolve o infesto.....	36
4.6	Peça percorrendo entre os pontos de intersecção.....	37
4.7	Geometria para cálculo da distância de deslizamento.....	38
4.8	Geometria para cálculo da distância de deslizamento, no problema	

	de encaixe.....	39
4.9	Valores de t no cálculo da distância de deslizamento na direção do vetor V	40
4.10	Exemplo de arestas interceptantes.....	41
4.11	Exemplo de orientações a serem testadas de uma peça.....	44
4.12	Orientações da peça depois de encaixadas e os respectivos retângulos de avaliação.....	45
4.13	Segmento de reta horizontal do polígono da região defeituosa.....	47
4.14	Interpretação geométrica dos valores de t_{AB}	48
4.15	Região defeituosa na região côncava da figura maior.....	49
4.16	Região defeituosa dentro da figura maior.....	50
4.17	Posição inicial de inserção.....	51
4.18	Deslizamento fora da região selecionada.....	52
5.1	Couro digitalizado.....	54
5.2	Histograma do rendimento de encaixe para ordenação pela área.....	59
5.3	Histograma do tempo de processamento de encaixe da ordenação pela área.....	60
5.4	Histograma do rendimento para ordenação pelo comprimento vertical....	61
5.5	Histograma do tempo de processamento para ordenação pelo comprimento vertical.....	62
5.6	Encaixe na orientação de 120° com peças ordenadas pelo comprimento vertical 67,4%.....	63
5.7	Encaixe na orientação de 120° com ordenação pela área - 67,5%.....	63
5.8	Melhor encaixe com ordenação pelo comprimento vertical - 67,9%.....	64
5.9	Melhor encaixe com ordenação pela área - 68,4%.....	65
5.10	Encaixe na orientação de 180° com ordenação pela área -68%.....	65
5.11	Gráfico do rendimento de encaixe com o número de orientações por peça.....	67
5.12	Gráfico do tempo de processamento relacionado com o número de orientações por peça.....	68
5.13	Melhor encaixe com 360 orientações por peça - 72,3 %.....	69
5.14	Encaixe de 176 peças que correspondem a 8 pares - 62,6 %.....	71

5.15	Teste para encaixar 198 peças - 68,2%.....	72
5.16	Infesto com regiões defeituosas já marcadas.....	73
5.17	Histograma relacionando ângulo do infesto com o rendimento de encaixe.....	74
5.18	Melhor encaixe com o infesto com defeito na orientação de 270°-67,9%	75
5.19	Rendimento de encaixe relacionado com o número de orientações.....	76
5.20	Tempo de processamento relacionado com o número de orientações por peça.....	77
5.21	Encaixe de melhor rendimento - 71,3%.....	77
5.22	Infesto preparado antes do procedimento de encaixe.....	78
5.23	Primeiro teste de encaixe com áreas pré-definidas,rendimento: 65,1%...	79
5.24	Infesto preparado para segundo teste	80
5.25	Segundo teste de encaixe com áreas pré-definidas, rendimento:66,7%.....	81
A.1	Fluxograma geral de encaixe.....	87
A.2	Fluxograma de preparação de dados.....	89
A.3	Fluxograma para intersecção de matrizes.....	91
A.4	Fluxograma para deslizamento.....	93
A.5	Fluxograma de seleção de arestas e vértices interceptantes.....	95
A.6	Fluxograma de rotina de Cyrus-Beck.....	97
B.1	Sistema de coordenadas global.....	98
B.2	Sistema de coordenadas local da peça.....	98

Lista de Tabelas

5.1	Moldes do sapato.....	55
5.2	Peças a serem inseridas.....	56
5.3	Resultados com as peças ordenadas pela área.....	58
5.4	Número de peças encaixadas com infesto nas orientações 180 ^o e 360 ^o	59
5.5	Resultados com ordenação pelo comprimento vertical.....	61
5.6	Resultados pelo número de orientações.....	67
5.7	Peças a serem inseridas de 8 e 9 pares de sapato.....	70
5.8	Resultados de acordo com a orientação do infesto.....	74
5.9	Resultados pelo número de orientações com regiões defeituosas.....	76
B.1	Dados geométricos do couro.....	99
B.2	Dados geométricos da gáspea.....	100
B.3	Dados geométricos do Talão.....	101
B.4	Dados geométricos da lateral e lingüeta.....	102
B.5	Dados geométricos da banana e reforço.....	103

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo gerar um conjunto de regras e procedimentos que permitam executar a tarefa de encaixar peças de contorno não convexo num espaço não convexo. O espaço não convexo de encaixe pode ter forma qualquer, inclusive conter furos internos. O objetivo final é propor um processo de otimização do encaixe de peças irregulares neste espaço. Este tipo de problema é bastante comum em processos industriais, onde as peças são obtidas de peças maiores, irregulares e com regiões inaproveitáveis. Este método pode ser aplicado a problemas da indústria metal-mecânica, têxtil e calçadista, além de outros ramos.

ABSTRACT

The purpose of this work is to generate a set of rules and procedures to execute nesting tasks with non-convex pieces in non-convex space. The non-convex shape can be of any kind, and contain many internal holes. The final purpose is to obtain a nesting optimization process of irregular pieces in this space. This kind of problem is very common in industry, where the pieces are obtained from irregular large pieces with non-exploitable regions. This method can be applied to mechanical, metalurgical, textile and leather industries, among other fields.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa aplicar métodos de encaixe, com peças convexas e não convexas, em um contorno não convexo. O método proposto procura colocar o maior número de peças numa área bidimensional não convexa, de forma mais densa possível, evitando desperdício de material. A região de encaixe pode conter regiões inaproveitáveis e furos.

O problema de encaixe de peças não convexas em um contorno não convexo é encontrado em muitos ramos industriais, onde peças menores são obtidas de peças maiores, em processos tais como estamparia corte por oxi-acetileno. Os métodos propostos nesta dissertação, bem como o software resultante, podem ser aplicados a ramos industriais, tais como indústrias metal-mecânica, têxtil e calçadista. Logicamente, o software resultante deverá ser adaptado para cada situação, visto que cada aplicação tem suas peculiaridades.

A maioria das soluções propostas para o problema de encaixe servem para o arranjo de peças planas em retângulos maiores. As peças planas podem ser irregulares ou retangulares. As soluções para encaixe de peças retangulares em retângulos maiores podem ser obtidas através do uso de técnicas de programação matemática inteira [19], [20], [23], [10]. Técnicas como a de envolver peças irregulares com retângulos, ou agrupar em um menor polígono convexo, também tem sido propostas como alternativa a obter encaixes em áreas retangulares [22], [26]. Neste trabalho, no entanto, o processo de encaixe de peças irregulares é obtido através de uma combinação de técnicas computacionais de manipulação de polígonos numa área retangular e do uso de regras heurísticas.

As metodologias utilizadas para encaixe em áreas retangulares são usadas neste trabalho para encaixar peças não convexas em contornos não convexas.

Algumas estratégias consistem na manipulação direta das peças no contorno não convexo, as quais resultam num conjunto de procedimentos de encaixe. Um destes procedimentos é o preenchimento da área de encaixe em direções pré-definidas. Um outro é inserir as peças, testando cada uma sobre a área de encaixe, até que nenhuma outra possa ser inserida. São ainda permitidas rotações das peças a serem encaixadas. Para cada nova direção de preenchimento são testadas todas as possíveis orientações das peças a serem encaixadas.

1.1 - Revisão Bibliográfica

Esta revisão bibliográfica apresenta alguns trabalhos importantes sobre o problema de encaixe de peças irregulares em áreas retangulares e objetiva mostrar algumas pesquisas que, de uma forma ou outra, contribuíram para elaboração desta dissertação.

Os primeiros estudos para buscar diminuir as perdas no processo de corte de matéria prima foram feitos em 1939 pelo economista russo Kantorovich, que foi citado por Haessler e Sweeney [22]. Gilmore e Gomory [17], [18] propuseram inicialmente um trabalho para resolver o problema, com a minimização do desperdício para o layout de uma dimensão usando programação linear. Depois, eles formularam o problema de cálculo de perdas no recorte em duas dimensões. Assim como Gilmore e Gomory [15], [16], Haesler [19] e Christofides [10] também usaram técnicas de programação matemática inteira e de procura em árvores para determinar a solução otimizada do problema.

Haims e Freeman [23] estudaram o problema de layout levando em consideração a ausência de restrições no número de peças de cada tipo, a ser cortado de uma chapa única de material. O método deles consiste em envolver peças irregulares isoladamente, ou em combinação, em uma área mínima retangular chamada "módulo". Outro procedimento, estudado e desenvolvido por Adamowicz e Albano [3], é o encaixe de peças retangulares e peças envolvidas por retângulos. O

primeiro estágio deste procedimento é definir uma envoltória retangular ótima em torno das peças irregulares e depois determinar um layout ótimo destes módulos. A determinação do retângulo que envolve as formas irregulares é a combinação de heurística e técnicas algorítmicas. Regras heurísticas associadas a algoritmos computacionais também foram propostos por Wang [34], Madsen [25] e Segenreich [29], [31]. Além da busca por envoltórios retangulares, Graham e Yao [20] e Lee e Woo [24] propuseram técnicas de encaixe usando a determinação do menor polígono convexo que envolve as peças já encaixadas.

Algumas propostas de aproveitamento de chapas retangulares, que fazem o uso intensivo de regras heurísticas, verificando o desperdício gerado no encaixe de cada peça, foram usadas no trabalho de Albano e Sapuppo [5]. Dependendo da maneira com que as regras heurísticas são usadas, pode ocorrer o impasse entre o tempo para obter a solução e a qualidade da solução obtida.

Algumas técnicas heurísticas e métodos para posicionar peças não convexas em área retangular foram expostas por Dias e Segenreich [13]. Este trabalho contribui com o método de intersecção de matrizes que auxilia no processo de inserção de peças. Outra contribuição foi o procedimento de deslizamento, baseado no uso da função D [8], [12]. Além disso, Dias [12] propõe o desenvolvimento de um processo de procura em árvore para determinar o rendimento mínimo de encaixe em áreas retangulares.

Prasad e Somasundaram [26] desenvolveram um algoritmo usando técnica de deslizamento de peças irregulares, onde uma peça é transladada em torno de uma outra peça estacionária. Eles classificam o problema de encaixe em dois grupos [26]. O primeiro é para peças que possuem formas retangulares nas quais as diferentes técnicas de programação matemática têm sido usadas para gerar arranjos ótimos. O segundo é para formas irregulares, nas quais diferentes enfoques heurísticos têm sido desenvolvidos para gerar arranjos ótimos por aproximação do perfil da peça para outra peça circunscrita por um retângulo ou polígono. Percebe-se que pouquíssimos trabalhos propuseram soluções para o problema de encaixe de figuras irregulares em contornos não convexos.

1.2 - Definições Básicas

Antes de expor maiores detalhes deste trabalho faz-se necessária uma noção sobre polígonos convexos e não convexos. Um polígono é considerado convexo se todos os pontos de todas as retas pertencentes ao polígono, pertencem à região interna do polígono, como mostra a Figura 1.1. Um polígono é caracterizado como não convexo, quando existe uma reta qualquer gerada por dois pontos pertencentes à região do polígono, com pontos fora do polígono. Esta definição pode ser visualizada na figura 1.2.

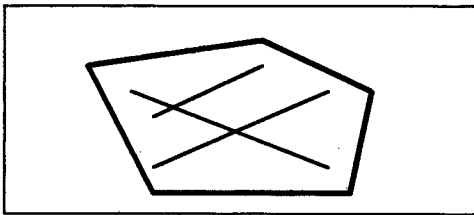


Figura 1.1 - Polígono convexo.

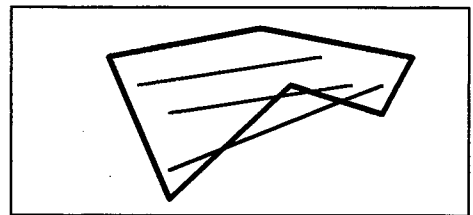


Figura 1.2 - Polígono não convexo.

A forma de ocupação do espaço bidimensional pode ser classificado em três tipos de preenchimentos: encaixe, cobertura e enchimento. No encaixe, as peças não se sobrepõem, enquanto na cobertura é permitido que as peças sobreponham-se. No enchimento, as peças preenchem todo o espaço sem sobreposição. No caso da cobertura e do enchimento todos os pontos da área a ser preenchida são ocupados pelas peças usadas no processo de preenchimento. Nenhum vazio é observado. A Figura 1.3 mostra os três diferentes tipos de procedimentos de encaixe.

As formas de preenchimento podem ser caracterizadas pela definição de rendimento ou eficiência de encaixe. O rendimento de encaixe numa área bidimensional é dado pela razão entre a soma das áreas das peças para preenchimento e a área do espaço a ser preenchido. As equações 1.1, 1.2 e 1.3 mostram os valores limites do rendimento de encaixe para as diferentes formas de preenchimento.

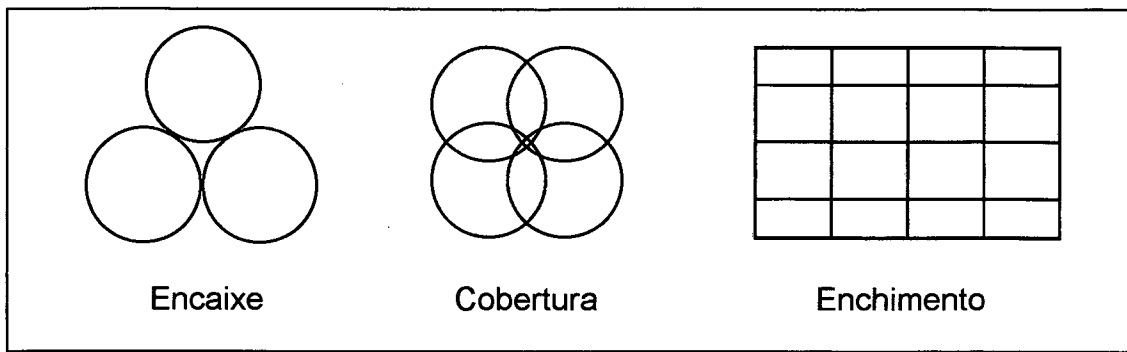


Figura 1.3 -Tipos de preenchimentos.

Chamando de A_p a soma das áreas das peças usadas para preenchimento e A a área total a ser preenchida, as relações a seguir indicam :

$$A_p / A \leq 1 \quad (1.1)$$

a definição do preenchimento por encaixe. Já a relação

$$A_p / A \geq 1 \quad (1.2)$$

define o preenchimento por cobertura, e a relação

$$A_p / A = 1 \quad (1.3)$$

define o preenchimento da área bidimensional denominado de enchimento.

O principal enfoque deste trabalho é o problema de encaixe, no qual o rendimento de encaixe é sempre menor que a unidade. Uma boa solução para este tipo de preenchimento seria atingir valores próximos a 1. O valor igual a um para eficiência de encaixe, dado pela Eq. 1.1 é difícil de ser assegurado devido a complexidade geométrica, tanto das figuras a serem encaixadas, como da região de encaixe. Mesmo em regiões bem regulares, como por exemplo, com peças e a região de encaixe retangulares, o rendimento de encaixe igual a um é impossível de ser atingido, como mostram as referências [9], [27], [28] e [32]. Uma solução de encaixe que atinja o valor unitário no rendimento seria num enchimento de área e o algoritmo resultante pode ser aplicado para obter soluções de mosaicos ou quebra-cabeças.

1.3 - Descrição do Trabalho

O capítulo 2 descreve como as peças, utilizadas no procedimento de encaixe, são representadas e manipuladas pelo algoritmo resultante desta dissertação. As regras heurísticas, que auxiliam no procedimento de encaixe, são descritas para dar uma idéia geral sobre o algoritmo. O capítulo termina mostrando o método de intersecção de matrizes que ajuda na inserção de figuras na região de encaixe através de matrizes de bits.

O capítulo 3 descreve os métodos de Intersecção de Matrizes e Deslizamento aplicados por Dias e Segenreich [13] para encaixe de figuras irregulares em uma região de encaixe retangular. Também são descritas rotinas de otimização que serviram para acelerar as tarefas de encaixe. Esse trabalho assume relevância, devido ao fato dos métodos de intersecção de matrizes e deslizamento terem servido de base para a elaboração desta dissertação.

O capítulo 4 mostra como os métodos de intersecção de matrizes e deslizamento foram aplicados no encaixe de figuras irregulares em uma região de encaixe não convexa. Neste mesmo capítulo, são descritas as rotinas de otimização que auxiliam os métodos de encaixe. Além disso, é feito um detalhamento de como os dois métodos interagem entre si e como as peças com diferentes orientações são testadas na região de encaixe. E, por último, os procedimentos para evitar sobreposição de figuras em cima de regiões defeituosas e encaixar figuras em áreas pré-definidas na região de encaixe são explicados e ilustrados.

Os resultados obtidos pelo algoritmo são mostrados e discutidos no capítulo 5. Os resultados foram executados em três situações diferentes: encaixes com a região não convexa sem defeitos, encaixes com defeitos e encaixes em regiões pré definidas. No final deste capítulo, os resultados de encaixes em contorno não convexo são comparados com resultados de encaixes em regiões retangulares da referência [12].

No capítulo 6, são enumeradas as conclusões e também são feitas sugestões para encaixe em contornos não convexos.

CAPÍTULO 2

BASE PARA O ALGORITMO DE ENCAIXE.

2.1 - Introdução.

Este capítulo começa descrevendo as características geométricas e a estrutura de dados das peças utilizadas no procedimento de encaixe. Neste mesmo item, são mostradas algumas características importantes usadas na manipulação de peças no algoritmo. Outra parte deste capítulo faz uma exposição sobre regras heurísticas, que servem de base para implementação dos métodos de encaixe. A última parte trata sobre a discretização de peças e região de encaixe que serão utilizados no método de intersecção de matrizes.

2.2 - Características Geométricas das Peças e Regiões de Encaixe

O contorno das peças, tanto as usadas no encaixe como o contorno de uma região de encaixe, é definido por segmentos de retas. A adoção de segmentos de retas, como principal elemento definidor do contorno das figuras, simplifica a representação geométrica, facilita a implementação de rotinas e dos algoritmos, além de diminuir o tempo de processamento computacional. Se representações de curvas são necessárias, estas devem ser aproximadas por meio de uma sequência de segmentos de retas, durante a definição dos contornos das peças. Desta forma, os

segmentos de retas serão denominados por arestas, que por sua vez são constituídas por vértices. Estas unidades de informação, arestas e vértices da peça, são dispostos na estrutura de dados de uma forma ordenada, no sentido anti-horário, como mostra a figura 2.1.

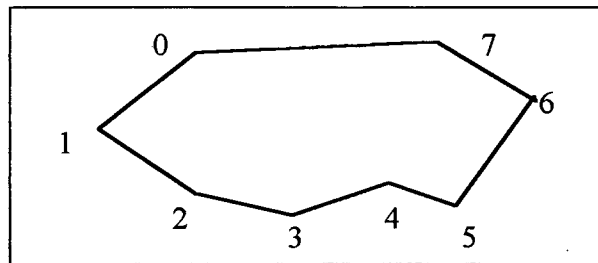


Figura 2.1 - Representação da peça.

As informações de uma peça podem ser organizadas em uma estrutura de dados. Esta estrutura é do tipo hierárquica, comum em diversas linguagens de programação. A Figura 2.2 busca mostrar tal estrutura, onde estão no mesmo nível hierárquico: o ponto de referência do sistema de coordenadas, os vértices e o raio do círculo que circunscreve a figura.

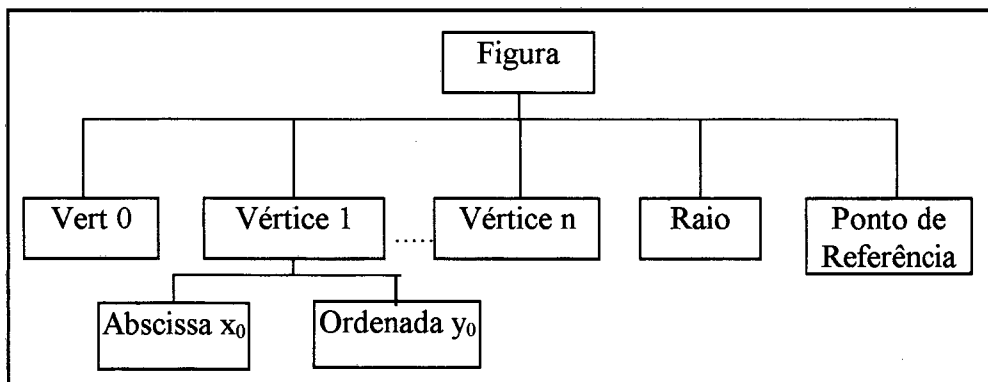


Figura 2.2 - Esquema da estrutura de dados.

Toda peça e seu contorno deve ser posicionada em relação a um sistema de coordenadas local de referência. A figura 2.3 mostra uma peça, numa posição genérica. Nela também está sendo mostrado, um ponto de referência qualquer no seu interior. No processo de geração das peças, este ponto tem a finalidade de definir um sistema de coordenadas, em relação ao qual as coordenadas dos vértices serão

armazenadas. Ele também é usado para os cálculos necessários para o posicionamento das peças durante o processo de encaixe. Este ponto é inserido arbitrariamente pelo usuário, durante o processo de digitalização da peça. Uma alternativa seria defini-lo pelo cálculo do centro de gravidade da peça, mas este método poderia fazê-lo cair fora da região de contorno, dependendo da não convexidade da peça. A manipulação da peça, pelo *mouse* (na tela), ou por um algoritmo, é feita usando este ponto interno. No arquivo de peças, as coordenadas dos vértices são armazenadas, usando este sistema local de coordenadas, cuja posição (0,0) é o ponto de referência. Um arquivo final de encaixe precisa somente referenciar a posição do ponto de referência e um identificador da peça.

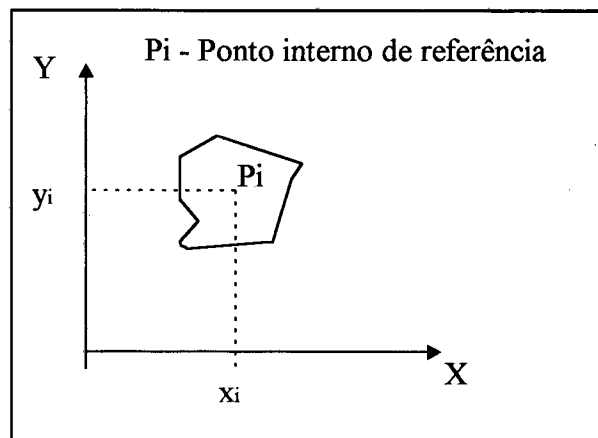


Figura 2.3 - Ponto interno de referência.

O próximo elemento na hierarquia são os vértices. Eles apontam para um nível inferior. Nele, as coordenadas x e y são informações sobre a posição dos vértices, no sistema de coordenadas definido pelo sistema de referência.

No mesmo nível de informação dos vértices, como mostra a figura 2.2, está uma variável chamada raio, a qual é definida como o raio do menor círculo que circunscreve a peça. Este raio é calculado tomando como base o ponto de referência interno. Esta variável é usada para auxiliar na rotina de definição de peças vizinhas já encaixadas, no método de encaixe por deslizamento.

As peças são manipuladas em relação a um sistema de coordenadas global. As abscissas e ordenadas do sistema de coordenadas, bem como as coordenadas dos vértices, ponto de referência e o raio da peça são definidos como números reais.

O sistema de coordenadas global é usado nos procedimentos, onde são necessários cálculos de geometria analítica tais como: cálculo de distância do contorno de uma peça ao contorno de outra, verificação de intersecção entre arestas.

Para obter a visualização das peças e do encaixe resultante num sistema de saída de dados (tela ou impressora), faz-se uma transformação geométrica do tipo *window-viewport*. Neste caso, o sistema de coordenadas de visualização usado para representar figuras na tela do monitor trabalha com as ordenadas e abscissas em números inteiros. Esta mesma transformação será necessária para manipular o encaixe pelo método de intersecção de matrizes como ver-se-á mais adiante na figura 2.6.

2.3 - Heurísticas

Entende-se regras heurísticas como um conjunto de procedimentos, sem regras matemáticas específicas, a priori, que auxiliam na busca de uma ou mais soluções de um problema. As soluções ótimas, assim obtidas, não podem ser consideradas como ótimas do ponto de vista matemático, já que fica difícil estabelecer as regras de convergência comumente usadas em métodos de otimização. No entanto, muitas das soluções obtidas por estes procedimentos podem ser consideradas aproximadas a pontos ótimos e de boa qualidade. Geralmente, as regras heurísticas são propostas para diminuir o tempo computacional na obtenção de resultados e usam muito do conhecimento prático e lógico, na solução de um problema.

O objetivo é a busca de regras, que se aplicadas, façam com que o espaço bidimensional do plano de encaixe seja densamente ocupado. Observando-se alguns fatores que influenciam no rendimento de encaixe, neste trabalho se estabeleceu o uso de três tipos de regras heurísticas:

- Ordenação do conjunto de peças;
- Estratégias de posicionamento das peças no encaixe;
- Uso de direções preferenciais para geração de encaixe;

2.3.1 - Ordenação do Conjunto de Peças

Uma regra prática que influencia na obtenção de melhores rendimentos é fazer uma ordenação das peças de encaixe pelo seu tamanho. Assim, a ordenação do conjunto de peças faz parte da preparação de dados, antes de começar o processo de encaixe. Esta tarefa define a ordem de inserção de peças, a partir de informações geométricas das mesmas.

Os dados geométricos da figura permitem classificar as peças pelo tamanho, isto é maiores e menores. Esta classificação, permite obter uma lista ordenada das mesmas. Desta forma, seguindo a lista, as peças maiores são colocadas em primeiro lugar e as peças menores por último. Este procedimento é baseado nas práticas de encaixes manuais, onde colocam-se peças maiores em primeiro e peças menores por último. O uso desta técnica possibilita otimizar a ocupação de vazios gerados pelo encaixe de peças maiores. Isto é, devido à forma geométrica, as peças maiores geram vazios no plano de encaixe. Estes vazios diminuem o rendimento de encaixe. Encaixando as peças menores por último, muitos destes espaços vazios são encaixados com as peças menores, aumentando o rendimento de encaixe.

Conceituar o que são peças maiores e menores é uma outra questão. As peças podem ser ordenadas pelo maior comprimento vertical, pela maior área, pelo maior perímetro, etc. Qualquer um destes critérios podem ser usados para ordenar uma coleção de peças antes do encaixe e influenciam no resultado final dos mesmos.

2.3.2 - Estratégia de posicionamento

O processo de posicionamento de peças no encaixe pode ser feito a partir de dois métodos: o método de intersecção de matrizes e o método de deslizamento de peças no plano de encaixe. O método de intersecção de matrizes, que será abordado no item 2.4, trabalha com figuras discretizadas em bits e o objetivo é encontrar uma posição no plano de encaixe sem sobreposição. O método de deslizamento trabalha

com equações da geometria analítica e busca deslizar as peças na área de encaixe, a fim de estabelecer a melhor posição possível.

O espaço de encaixe é definido por um retângulo que envolve a área de encaixe. Este retângulo é discretizado numa matriz de bits, ou bitmap. As regiões fora da área efetiva de encaixe são representadas por bits acesos (ocupadas) e as regiões desocupadas por bits apagados (disponível ao encaixe).

A posição inicial de uma peça a ser encaixada é a posição mais à esquerda e inferior que uma peça pode ser colocada dentro do retângulo que circunscreve a região de encaixe, conforme mostra a figura 2.4. A partir desta posição, testa-se se ela é uma posição de encaixe, isto é, verifica-se se algum bit aceso da peça sobrepõe a algum bit aceso da área de encaixe. Se nenhum bit aceso não sobrepor algum bit aceso do plano de encaixe a peça será encaixada na posição de teste. Caso a peça não seja encaixada, incrementa-se um bit em y . Enquanto a peça não é encaixada, y vai sendo incrementado. Se a peça não for encaixada até o limite superior do retângulo, incrementa-se x de um bit e a peça é colocada no limite inferior do retângulo. Este processo é repetido até que a peça seja encaixada.

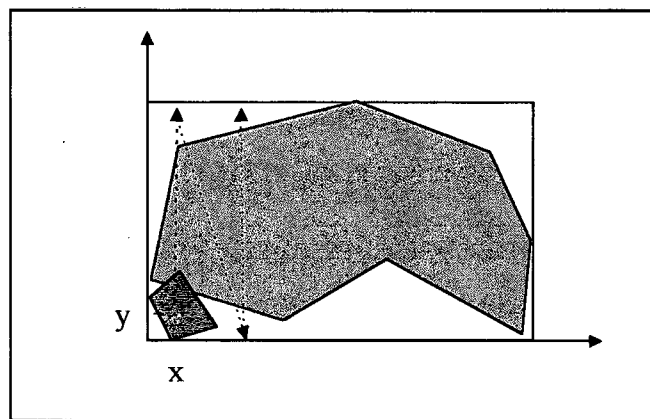


Figura 2.4 - Exemplo de varredura.

Encontrada a posição de encaixe por intersecção de matrizes, as coordenadas de número inteiro da peça discretizada são convertidas em coordenadas de números reais. Logo após, é necessário fazer os testes de intersecção com equações paramétricas para assegurar que não há nenhuma intersecção no espaço dos números reais. O próximo passo é aplicar o método de deslizamento baseado na técnica de recorte de retângulos desenvolvida por Cyrus-Beck [11]. Através deste

método, calcula-se a posição final de encaixe.

O restante das peças também são encaixadas do mesmo modo, sempre começando a serem encaixadas por intersecção de matrizes e depois por deslizamento. Com as peças partindo sempre do canto esquerdo inferior, torna-se possível garantir a ocupação dos vazios, gerados por peças maiores, com peças menores.

2.3.3 - Uso de Faixas para Geração do Encaixe

Como se observou no item anterior, as peças devem percorrer direções preferenciais para serem posicionadas no encaixe. A primeira peça na posição esquerda inferior, ao se mover, estabelece um corredor, no qual as outras peças devem percorrer. Assim sendo, define-se este corredor como sendo uma faixa de encaixe. A faixa é, portanto, uma região definida por uma direção preferencial de preenchimento, onde o grupo de peças vão sendo colocadas e devem percorrer, antes de achar uma posição definitiva. Assim, a forma de ocupação do plano de encaixe é definida por faixas. A definição de direções preferenciais são abordadas por Dias e Vinadé nos trabalhos [14], [15].

Num contorno não convexo haverá muitas direções nas quais as faixas de geração de encaixe poderão ser construídas. Portanto, o primeiro passo é escolher a direção preferencial de encaixe. Na figura 2.5, é mostrado um sistema de coordenadas cartesiano xy onde o eixo y corresponde à direção de preenchimento. Escolhida a direção da faixa de encaixe, a região de encaixe é girado até que a faixa de encaixe seja paralela com o eixo y . Ou seja, estas faixas servem também para estabelecer rotações na peça que está recebendo os encaixes, até se achar uma solução ótima.

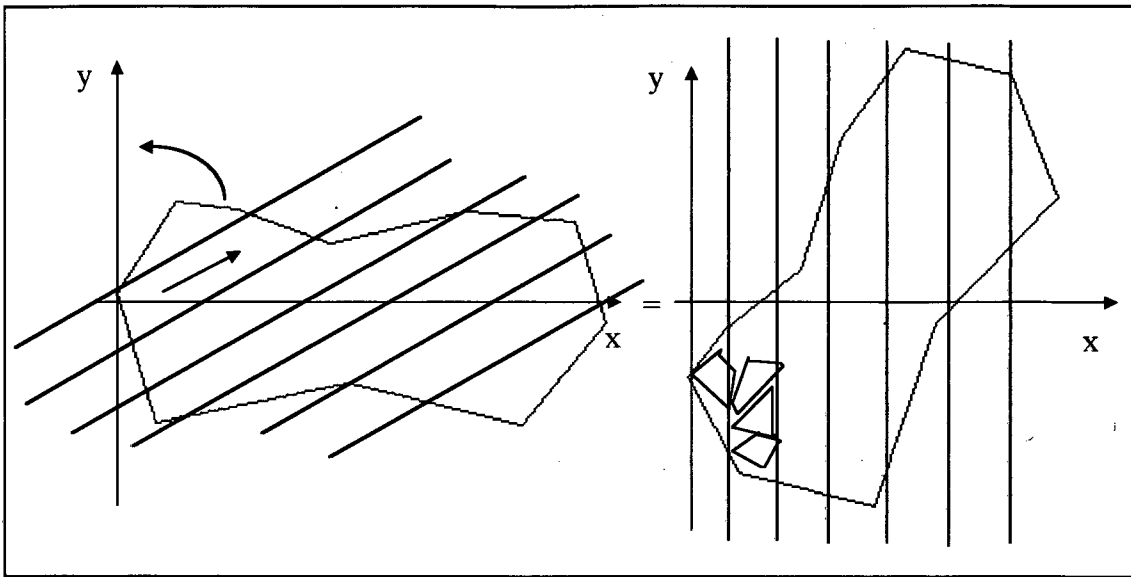


Figura 2.5 - Definição da faixa preferencial de encaixe.

Assim, as peças vão sendo inseridas na direção y , dentro do contorno do plano de encaixe.

2.4 - Discretização das Peças e Região de Encaixe

O método de Intersecção de Matrizes consiste em discretizar a região de encaixe numa matriz de bits. Esta matriz de bits é definida por uma matriz de elementos pontuais lógicos, cujo valores, são zeros e uns e indicam se um ponto do espaço de encaixe está ocupado ou não [12]. O número de linhas e colunas desta matriz depende das dimensões do retângulo que circunscreve a região de encaixe, isto é, da área de encaixe e também do número máximo de elementos inteiros (N) a serem usados na matriz. Levando em conta que se quer armazenar uma matriz de números inteiros, o número de linhas e colunas da matriz são obtidas na seguinte forma:

$$r = \frac{h_{global}}{b_{global}} \quad (2.1)$$

$$h_{matriz} = \sqrt{N \cdot r} \quad (2.2)$$

$$b_{matriz} = \frac{h_{matriz}}{r} \quad (2.3)$$

Os valores b_{global} e h_{global} são dimensões reais do retângulo que circunscreve o plano de encaixe como mostra a figura 2.6a. N é o número máximo de inteiros que se quer para gerar a matriz bitmap. Os valores h_{matriz} e b_{matriz} são respectivamente o número de linhas e colunas da matriz de bits. Definidas as dimensões da matriz de bits, faz-se o preenchimento da mesma com elementos unitários conforme figura 2.6b.

O armazenamento da matriz de bits é baseado na conversão de números binários em números inteiros positivos, os quais são armazenados em um array. Os elementos desta matriz, os bits, são separados em grupos de 16, sem alterar a sua ordem. Cada grupo de 16 bits corresponde a um número binário que é convertido em um número inteiro positivo. O conjunto de números inteiros positivos, obtidos pelos bits da matriz, são armazenados em um array unidimensional, conforme a figura 2.6b.

Para inserir o plano de encaixe, as coordenadas dos vértices devem ser transformadas do sistema global para o sistema de coordenadas da matriz de bits. As coordenadas do plano de encaixe na matriz de bits são obtidas pelas transformações *window-to-viewport* de Foley, et al [16]. Aplicando-se estas transformações são fornecidas as seguintes equações:

$$x' = (x - x_{min}) \cdot \left(\frac{b_{matriz}}{x_{max} - x_{min}} \right) \quad (2.4)$$

$$y' = (y - y_{min}) \cdot \left(\frac{h_{matriz}}{y_{max} - y_{min}} \right) \quad (2.5)$$

Onde: (x', y') - coordenadas do vértice na matriz;

(x, y) - coordenadas do vértice no sistema de coordenadas mundo;

b_{matriz} - número de colunas da matriz;

h_{matriz} - número de linhas da matriz;

(x_{min}, y_{min}) e (x_{max}, y_{max}) - coordenadas do retângulo circunscreve a região de encaixe;

A origem da matriz de bits é sempre o bit (0,0).

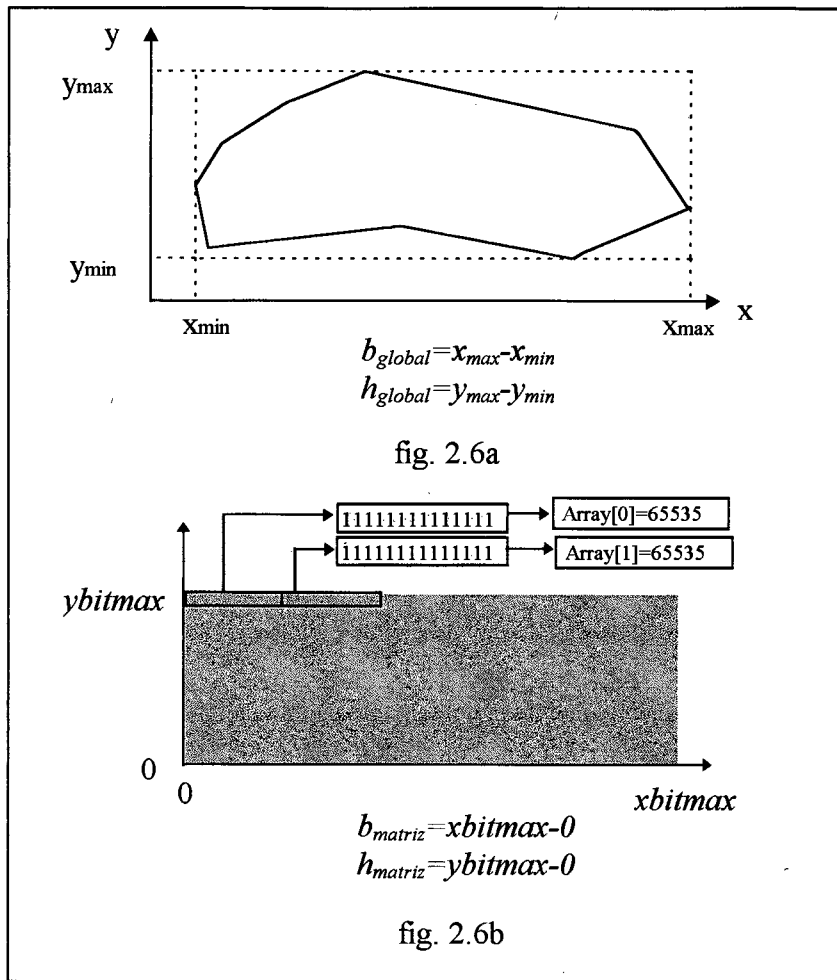


Figura 2.6 - a) Retângulo envolvente do plano de encaixe. b) Matriz de bits.

O próximo passo é a discretização da região de encaixe e inserção da mesma na matriz de bits. A matriz de bits assume uma nova configuração mostrada na figura 2.7. A região de encaixe, também chamada de infesto, quando inserida na matriz de bits, define um contorno que é preenchido internamente com valores nulos. As regiões externas ao contorno são mantidas com valores unitários. Na figura 2.7, a região mais clara do plano de encaixe é composta por elementos nulos enquanto que a região mais escura é formada por valores unitários. Esta matriz denominaremos como matriz M.

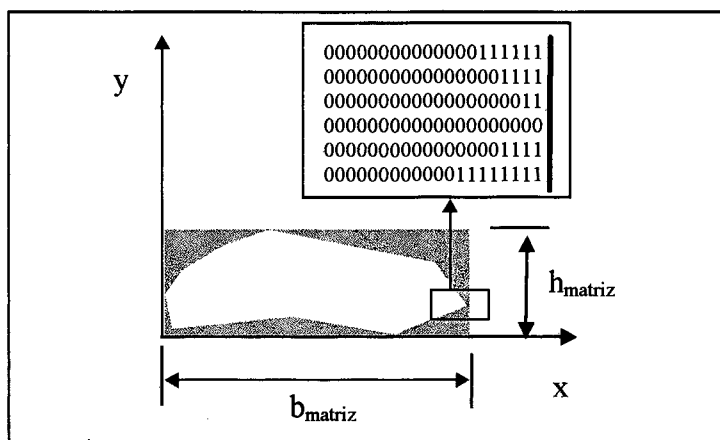


Figura 2.7 - Matriz de bits do infesto.

Para discretização de uma peça a ser encaixada, também é necessário a definição do retângulo que a circunscreve. Os vértices da peça também são transformados para as dimensões da matriz de bits usando equações 2.4 e 2.5. De forma contrária ao preenchimento do infesto, a região interna da peça é preenchida com valores unitários, conforme figura 2.8. A matriz de bits da peça denominaremos como matriz F.

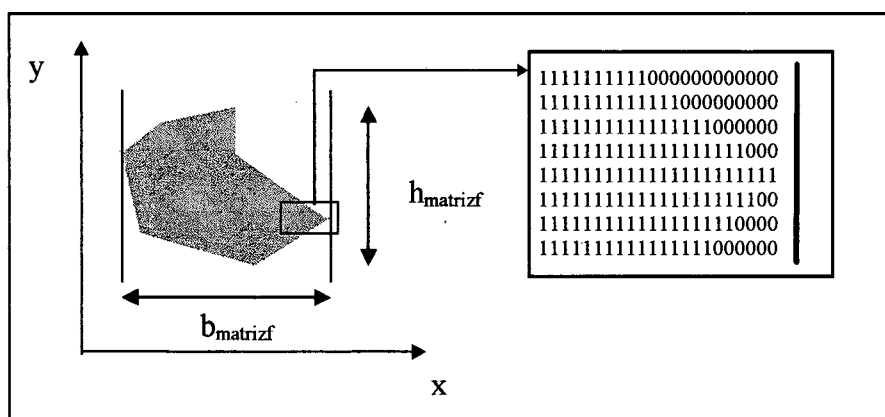


Figura 2.8 - Matriz de bits da peça.

O processo de encaixe por intersecção de matrizes consiste em verificar se algum elemento unitário da matriz F não sobrepõe algum elemento unitário da matriz M. A peça é inserida na matriz M quando encontra-se numa posição sem sobreposição. O infesto e as peças encaixadas são armazenadas na matriz de bits em suas respectivas posições, como mostra na figura 2.9.

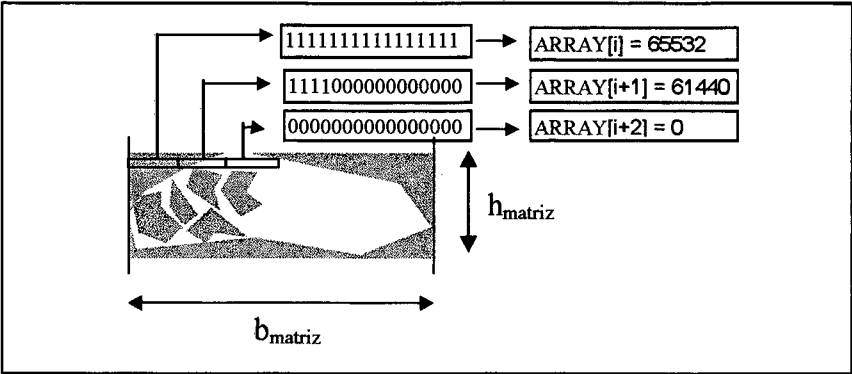


Figura 2.9 - Matriz de bits com infesto e peças encaixadas.

CAPÍTULO 3

ALGORITMO DE ENCAIXE EM REGIÃO RETANGULAR.

3.1 - Introdução

Este capítulo descreve como os métodos de intersecção de matrizes e deslizamento foram aplicados, conforme referência [13], para encaixar peças irregulares em região retangular. Com as peças e a região de encaixe já discretizadas, aqui são explicados os passos para encontrar uma posição sem sobreposição, através do método de intersecção de matrizes com auxílio da função D.

O passo seguinte é mostrar como o método de deslizamento determina a distância mínima de deslizamento sem intersecção com as peças já encaixadas. Também são descritas rotinas e regras heurísticas que auxiliam o método de deslizamento no algoritmo de encaixe em área retangular. Algumas destas rotinas e regras heurísticas servirão de base para elaboração do algoritmo de encaixe em contorno não convexo.

3.2 - Método de Intersecção de Matrizes

O procedimento de Intersecção de matrizes começa com a discretização da região de encaixe retangular numa matriz de bits. Esta matriz de bits representa a área retangular onde serão inseridas as peças irregulares. Cada elemento desta matriz é um

valor nulo. O valor nulo representa uma pequena área vazia.

As peças a serem inseridas, também são discretizadas numa matriz de bits, usando o menor retângulo que envolve a peça. A matriz de bits tem a região interna da peça discretizada preenchida com valores unitários e a região externa preenchida com valores nulos, como pode ser observada na figura 3.1.

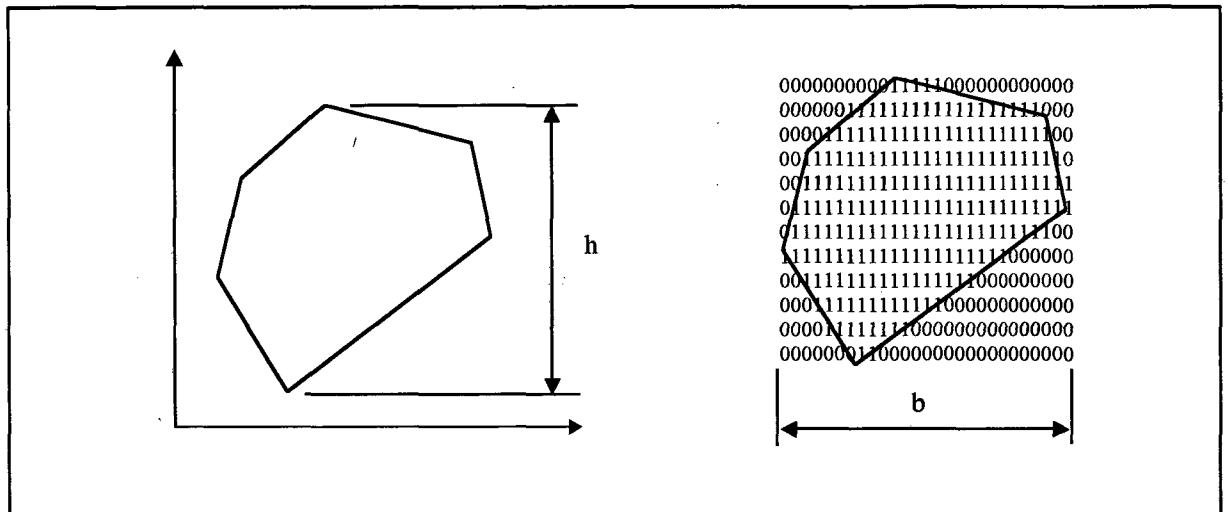


Figura 3.1 - Discretização de uma peça.

O procedimento de colocação de peças no plano de encaixe consiste em fazer a matriz de bits da peça percorrer sobre a matriz de bits da área retangular de encaixe. A cada nova posição da peça discretizada são executadas rotinas de verificação de sobreposição de peças. Usa-se o princípio de achar uma condição de rejeição, para a posição da peça. Assim sendo, na nova posição da peça discretizada é feita uma verificação se os pontos dos vértices não estão sobre uma região já ocupada por alguma outra peça. Caso não haja nenhuma sobreposição dos vértices da peça, é feita a verificação com os pontos das arestas da peça. Não havendo nenhuma sobreposição neste dois testes anteriores, pode-se dizer que foi encontrada uma posição de encaixe. No entanto, devido ao chamado “Efeito Escada”, comum em processos de discretização de retas, mostrado na figura 3.2, não é possível assegurar que a posição encontrada está totalmente livre de sobreposição; nos testes de detecção de sobreposição foi usado

somente o contorno da peça. Para eliminar as situações como a do "Efeito Escada", o novo teste deveria verificar a sobreposição usando os valores unitários do interior da peça a ser inserida [12]. Como este processo envolve um tempo computacional razoável, a solução adotada é determinar este tipo de sobreposição no espaço de números reais. Aplicando a função D, descrito no próximo item, determina-se as possíveis interseções entre as retas da peça a ser encaixada e as demais já encaixadas, usando as coordenadas do arquivo de peças. Não havendo nenhuma intersecção, a posição da peça é considerada de encaixe, sem sobreposição.

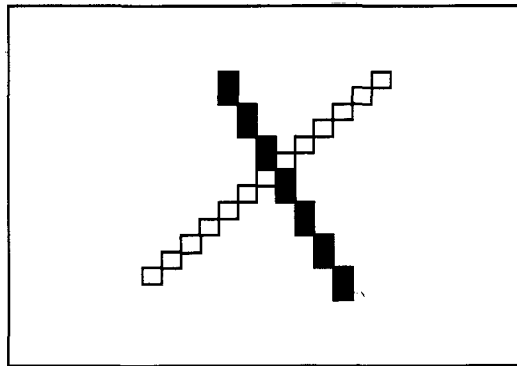


Figura 3.2 - Exemplo de "Efeito Escada".

3.3 - Método de Deslizamento de Peças

O método de deslizamento consiste em posicionar uma peça na região de encaixe, sem sobreposição e deslizá-la, até que ela encontre uma de forma mais densa possível. Como as peças são constituídas por vértices e segmentos de retas é possível calcular a distância do contorno de uma peça ao contorno de outra. Esta metodologia, empregada por Dias e Segenreich [13], calcula a distância de colisão entre uma peça a outra, numa dada direção, usando os princípios da geometria analítica baseados na determinação da distância de um ponto a uma reta. A metodologia aplicada é baseada na determinação da

função D [8]. Nos itens a seguir será demonstrado como a função D foi adaptada para estabelecer a posição de encaixe por deslizamento.

3.3.1 - Função D

A função D [8], [12], [13] tem o objetivo de determinar a posição relativa de um ponto P a uma reta suporte de segmento AB no plano. A posição relativa de um ponto a uma reta é interpretada pelo sinal da função D. A função D é obtida a partir da equação que calcula a distância de um ponto P a um segmento de reta suportada por AB.

Assim sendo, baseando-se na geometria analítica, a distância de um ponto $P(x_p, y_p)$ a um segmento de reta suportada por AB, é fornecida por:

$$d = \frac{(x_a - x_b) \cdot (y_a - y_p) - (y_a - y_b) \cdot (x_a - x_p)}{L} \quad (3.1)$$

Onde:

$$L = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \quad (3.2)$$

A reta AB e o ponto P são representados no plano cartesiano mostrado na figura 3.3.

A função D é definida pelo produto (d.L). A posição de P em relação à reta AB é interpretada pelo sinal da função D. Verificando o sentido do vetor AB, a função D nos permite as seguintes interpretações:

- 1 - P encontra-se à esquerda de AB se o valor $D > 0$;
- 2 - P encontra-se à direita de AB se o valor de $D < 0$;
- 3 - P encontra-se sobre o segmento de reta AB se o valor de $D = 0$;

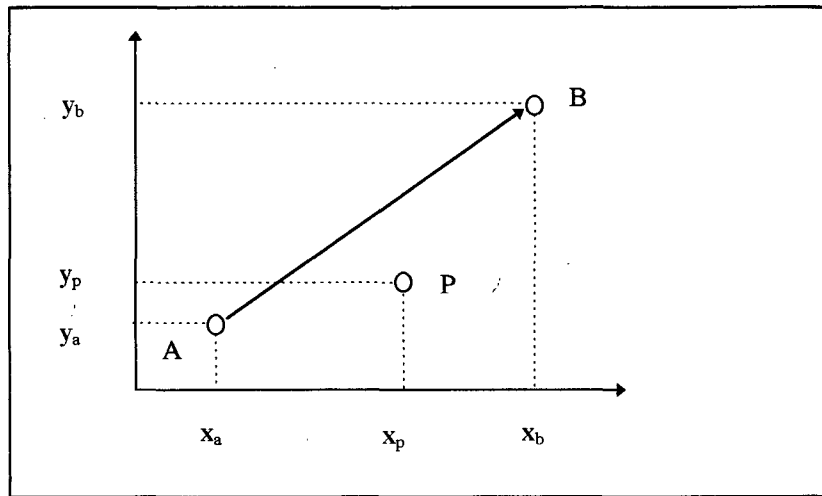


Figura 3.3 - Elementos de cálculo da distância do ponto P à reta AB.

3.3.2 - Testes de Intersecção usando a Função D

Aplicando-se a função D é possível saber se existe intersecção no plano cartesiano entre dois segmentos de retas AB e CD, ver figura 3.4. Esta informação é fornecida através da análise do sinal da função D. O primeiro passo é verificar os sinais da função D para os pontos A e B, que definem o segmento de reta AB, em relação ao segmento de reta CD. Se os sinais da função D para os pontos A e B em relação ao segmento CD forem contrários, há possibilidade de os segmentos de retas AB e CD serem interceptantes. Para confirmar, verifica-se os sinais da função D para os pontos C e D em relação ao segmento de reta AB. Se estes sinais também forem contrários, os segmentos de retas AB e CD são interceptantes. A figura 3.4 mostra a intersecção entre as retas AB e CD.

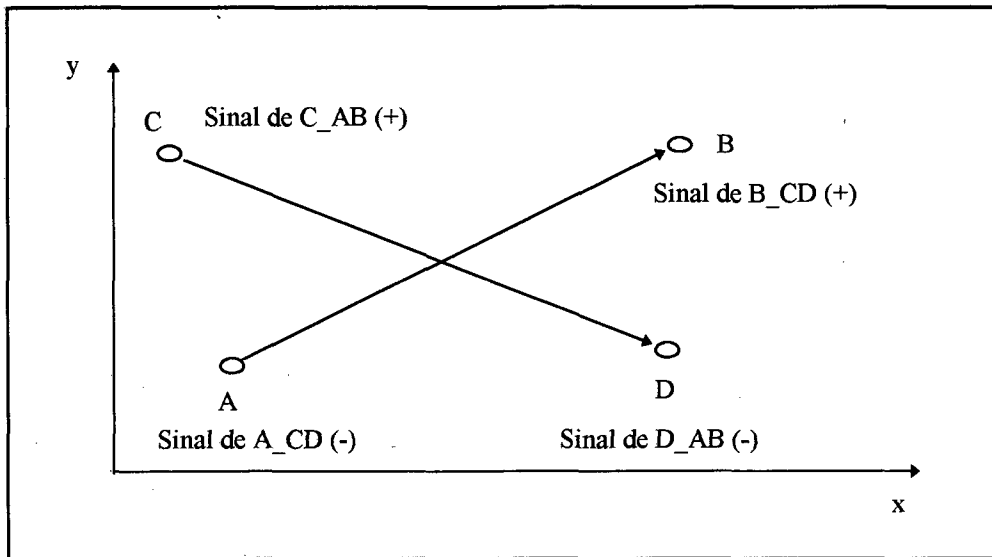


Figura 3.4 - Intersecção das retas AB e CD e os respectivos sinais da função D .

3.3.3 - Processo de Posicionamento de Figuras por Deslizamento:

A técnica de deslizamento utilizado por Dias [12] consiste em deslizar uma peça qualquer numa posição do retângulo de encaixe. Com a direção de um vetor V , desloca-se a peça para junto das demais peças já encaixadas, como é mostrado na figura 3.5.

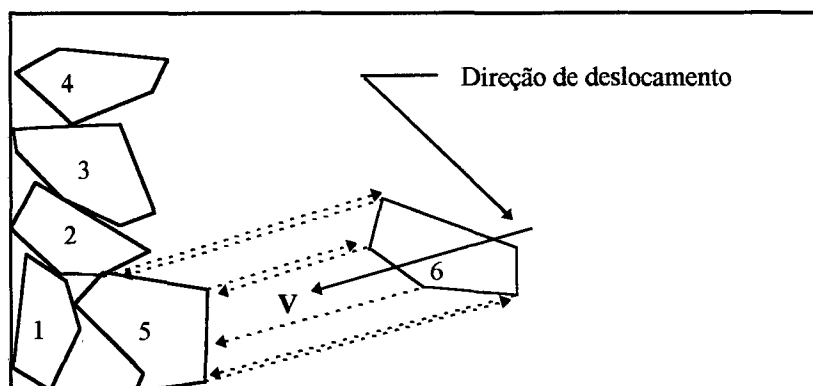


Figura 3.5 - Exemplo de encaixe por deslizamento.

A distância de colisão, numa direção \mathbf{V} , entre a peça a ser encaixada e as peças já posicionadas é definida pelo vetor \mathbf{V} e os vértices da peça deslizante e das demais peças. Um vértice da peça deslizante e o vetor \mathbf{V} determinam uma reta no plano de encaixe. Desta forma, aplica-se a função D para encontrar quais as arestas das peças já posicionadas que interceptam a reta definida acima. Quando existe intersecção entre essa reta e uma aresta, pode-se calcular o ponto de intersecção das mesmas. Com as coordenadas do ponto de intersecção e do vértice da peça deslizante, calcula-se a distância mínima de colisão entre as peças. Este procedimento é repetido para cada vértice da peça deslizante, em relação às arestas das peças já posicionadas. Da mesma forma, é feito com cada vértice das peças já posicionadas em relação às arestas da peça deslizante. O resultado final destes cálculos é uma coleção de distâncias entre as peças. A distância de deslocamento será o menor valor desta coleção. O sentido de deslizamento é definido pelo vetor \mathbf{V} [12].

Antes de executar os cálculos da mínima distância são utilizadas rotinas de otimização. Estas rotinas têm por objetivo diminuir o número de cálculos feitos durante os testes de intersecção e são aplicadas na seguinte ordem:

- a) Faixa de deslizamento;
- b) Definição do raio da figura;
- c) Seleção das arestas interceptantes;

a) Faixa de Deslizamento:

Os eixos dos sistemas de coordenadas cartesianas das peças são paralelos aos lados do retângulo de encaixe. O vetor \mathbf{V} , que define a direção de deslocamento para junto das peças já encaixadas, determina o novo sistema de coordenadas $X'Y'$ cuja direção X' coincide com a direção de \mathbf{V} .

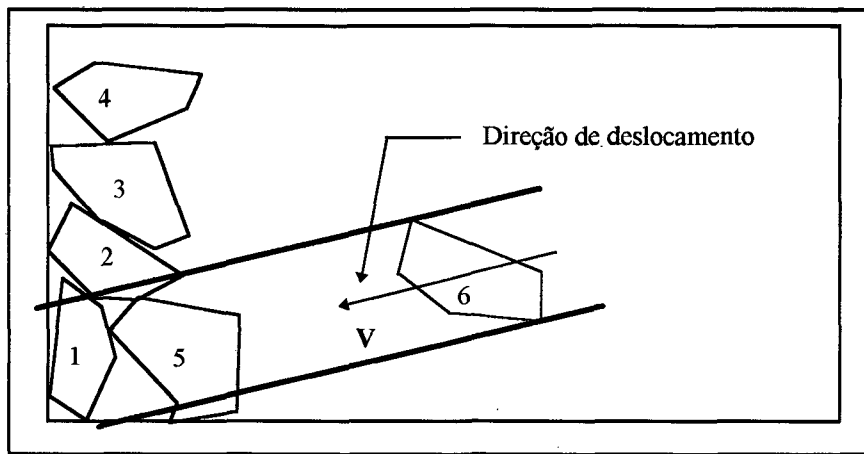


Figura 3.6 - Exemplo de faixa de deslizamento.

As coordenadas dos vértices da peça deslizante são calculadas para o novo sistema de coordenadas $X'Y'$ através de uma transformação linear. Após a transformação, seleciona-se os vértices que possuem valores de Y' máximo e mínimo. Em cada um desses vértices é traçada uma reta paralela a V . A faixa de deslizamento é visualizada na figura 3.6. As peças já encaixadas que possuírem vértices dentro da faixa, serão colocadas na lista de possíveis peças interceptoras [12].

b) Seleção das Figuras Potencialmente Interceptoras:

Na lista de possíveis peças interceptoras, há peças que, devido à sua disposição, jamais colidirão com a peça deslizante. Para eliminar peças não interceptoras desta lista é necessário a aplicação de uma segunda rotina de otimização.

Para selecionar as peças potencialmente interceptantes cada peça contém na sua estrutura de dados uma variável denominada raio. A variável raio define o menor círculo que circunscreve a peça.

Com os raios das peças que pertencem à faixa deslizante, calcula-se a distância entre os círculos envolventes das peças posicionadas na faixa deslizante e o círculo envolvente da peça deslizante. As distâncias são ordenadas no sentido crescente. Após a ordenação, calcula-se a menor distância de deslocamento que a peça deslizante pode

percorrer sem interceptar qualquer outra peça encaixada. As peças que possuírem distâncias entre as circunferências envolventes maiores que o deslocamento mínimo já calculado, não serão utilizados para o próximo passo do processo [12].

d) Seleção das Arestas Interceptantes:

Devido ao posicionamento das peças já encaixada em relação à peça deslizante, algumas arestas das peças jamais serão interceptadas pela peça deslizante. Pensando desta forma, é possível desenvolver uma rotina de otimização do algoritmo para selecionar somente arestas potencialmente interceptantes, para o cálculo da distância mínima. Estas arestas podem pertencer à peça deslizante e às peças encaixadas.

Para selecionar somente arestas potencialmente Interceptantes, seguem-se algumas regras. Uma das regras é o estabelecimento da numeração dos vértices das figuras no sentido anti-horário, conforme figura 2.1.

Isto possibilita a definição de normais às arestas das peças. Ao pensar que as peças estão no plano e que a normal ao plano está sendo dada pela direção apontada pelo polegar, seguindo a regra da mão direita, esta estratégia define uma sistema de coordenada em cada vértice. Este sistema de coordenada é dado pela aresta, a normal à aresta e a normal ao plano contendo a aresta. Desta forma, pode-se definir agora as arestas potencialmente interceptantes, conforme figura 3.7. As arestas potencialmente interceptantes são selecionadas pelo resultado do produto escalar entre o vetor V (definidor da direção de deslizamento) e a normal n ao vetor definido pela arestas das peças. As arestas potencialmente interceptantes da peça deslizante são estabelecidas pelo equação:

$$V \cdot n > 0 \quad (3.3)$$

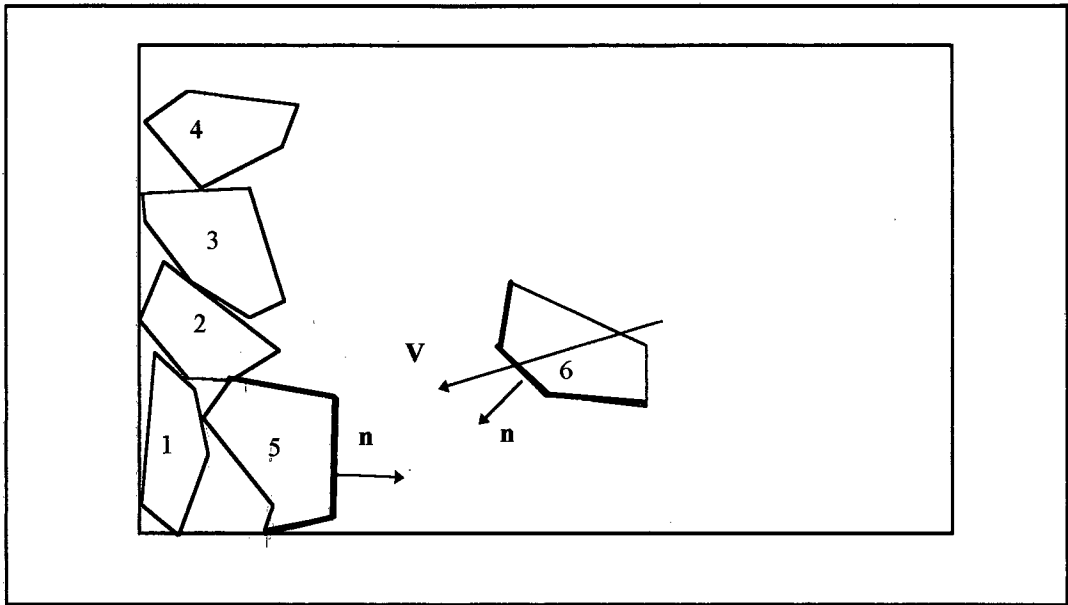


Figura 3.7 - Exemplo de arestas interceptantes.

Já as arestas interceptantes das peças encaixadas é baseada no produto escalar entre o vetor $(-V)$ e a normal à aresta e pode ser selecionadas a partir da seguinte equação:

$$-V \bullet n > 0 \quad (3.4)$$

Após a aplicação desta rotina em todas arestas das peças potencialmente interceptoras, forma-se uma lista de pares de vértices, referentes às arestas, que poderão participar do processo de colisão entre as peças deslizantes e interceptantes.

Usando-se somente arestas previamente selecionadas, diminui-se o número de cálculos para encontrar a distância mínima a ser percorrida pela peça deslizante no sentido do vetor V .

CAPÍTULO 4

ENCAIXE EM CONTORNO NÃO CONVEXO

4.1 - Introdução

Este capítulo começa descrevendo as modificações introduzidas no método de intersecção de matrizes e método de deslizamento para poder realizar encaixes em contornos não convexos. Também são descritas novas rotinas de otimização adaptadas aos métodos de encaixe. Em seguida descreve-se a rotina que gerencia o encaixe de uma peça em diferentes ângulos e mostra como é selecionado o ângulo que gera melhor posição de encaixe. O item 4.4.2, encaixe de peças do mesmo tipo, trata sobre uma heurística que diminui o tempo de processamento do algoritmo. No procedimento de encaixe em regiões com defeitos e furos, descreve-se a rotina para evitar que peças se sobreponham nas regiões com defeitos e furos. Por último explica-se como as peças são encaixadas em regiões definidas arbitrariamente.

4.2 - Encaixe por Intersecção de Matrizes

O dimensionamento da matriz de bits, onde as peças vão ser inseridas, é uma das inovações realizadas no algoritmo de encaixe em contorno não convexo. Como relata o item 2.4, a matriz de bits é dimensionada pelo retângulo que envolve o contorno não convexo. A matriz é preenchida com elementos unitários e depois o contorno não convexo é inserido como uma peça encaixada, na visão de Dias [12]. O

resultado deste procedimento é a definição da região interna e externa ao contorno não convexo, conforme a figura 2.7 do capítulo 2.

Outra alteração foi no processo de detecção do efeito escada. No algoritmo de Segenreich e Dias [13] é utilizada a função D , enquanto que no algoritmo de encaixe em contorno não convexo usa equações paramétricas para detecção de intersecção entre dois segmentos de retas no espaço dos números reais.

Além das alterações citadas acima, o método de intersecção de matrizes foi implementado com duas rotinas de otimização. Uma rotina é a otimização através do raio da circunferência que circunscreve a peça a ser inserida. A outra rotina é a otimização através do posicionamento da peça na matriz de bits.

O método de intersecção de matrizes é subdividido em tais itens:

- Geração de matrizes;
- Detecção de superposição;
- Teste de intersecção com segmentos de retas paramétricas;
- Uso do raio que circunscreve a peça;
- Otimização através do posicionamento da peça na matriz bits da região de encaixe;

4.2.1 - Geração de Matriz

O processo de geração de matriz utilizado no algoritmo de encaixe em contorno não convexo é o mesmo usado no algoritmo de encaixe em área retangular [12]. No algoritmo resultante desta dissertação, o plano de encaixe com contorno não convexo é discretizado por este processo, dentro de uma região retangular.

A estratégia de posicionamento, item 2.3.2, a peça percorre toda a matriz de bits até encontrar uma posição de encaixe. Uma vez achada uma posição de encaixe, o preenchimento da matriz de encaixe, para a peça a ser inserida, é feito através de um procedimento semelhante a integração numérica pela regra do trapézio [30]. Como o contorno das peças é formado por segmentos de retas, os vértices são numerados no sentido anti-horário, o preenchimento da matriz de bits se dá tomando o vértice mais à

esquerda da peça e aí, alternando o valor para zero ou um de todos os bits abaixo das retas do contorno, de acordo com o seu valor inicial. O resultado final deste procedimento é a obtenção do preenchimento interno do contorno da peça encaixada. A execução deste procedimento é feito usando um algoritmo de geração de linhas. Neste trabalho foi utilizado o algoritmo de Brenseham [33] para geração de retas em espaços inteiros. A figura 4.1 mostra o preenchimento abaixo da reta 01. O mesmo procedimento é executado para reta 12, 23 e 30 gerando a forma discretizada da peça.

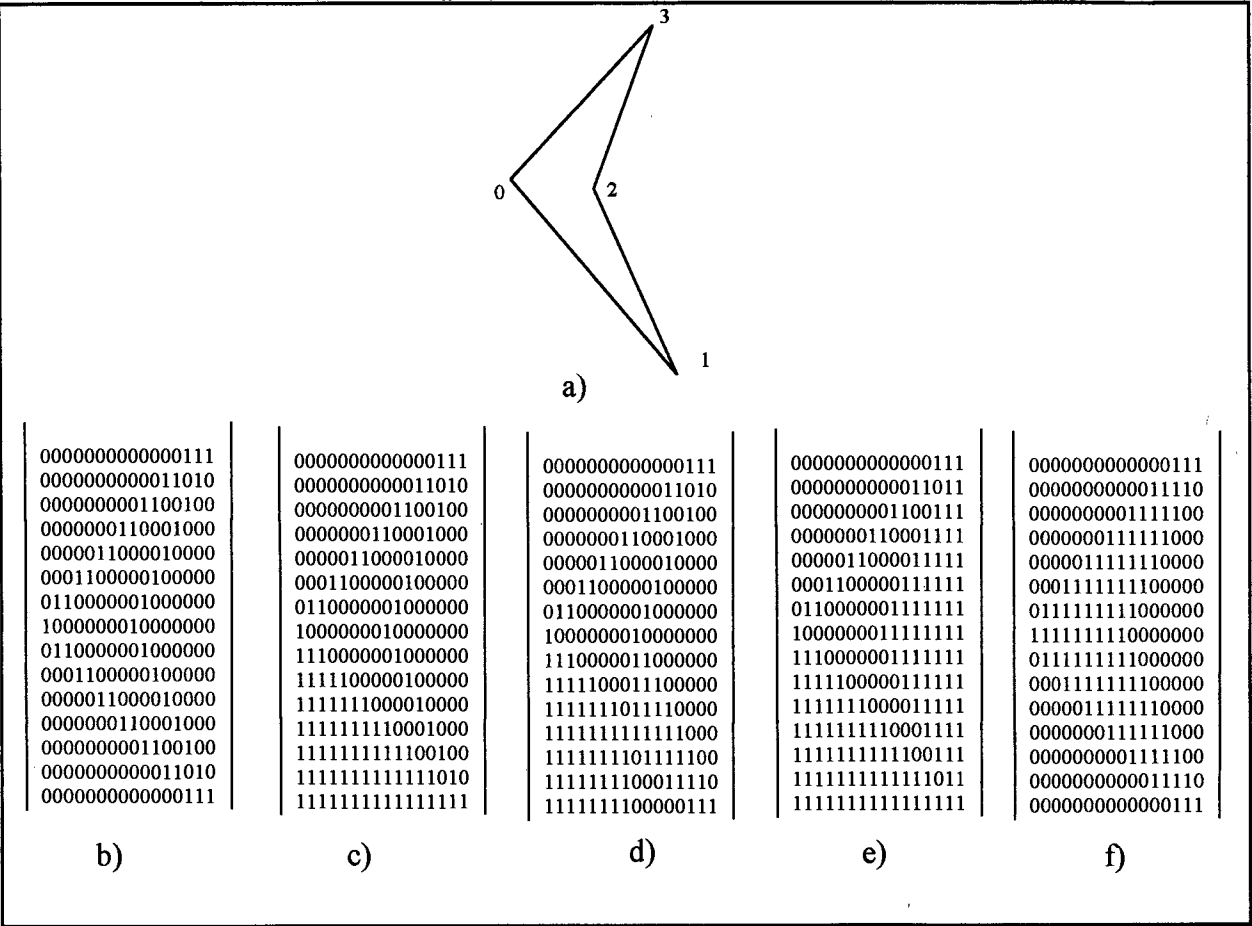


Figura 4.1 - Seqüência de discretização: a) Peça a ser discretizada; b) Retas 01,12, 23, 30 discretizada; c) Preenchimento abaixo da reta 01; d) Preenchimento abaixo da reta 12. e) Preenchimento abaixo da reta 23. f) Preenchimento abaixo da reta 30.

4.2.2 - Detecção de Superposição

Para evitar a colocação da peça a ser inserida em uma região já ocupada por outras peças já encaixadas, conforme a figura 4.2, executa-se uma rotina para detecção de superposição. Esta tarefa, que consiste em verificar se os bits da peça discretizada não sobrepõe algum bit já ocupado da matriz de bits da região de encaixe, é executada pelo mesmo processo usado no algoritmo de encaixe em área retangular.

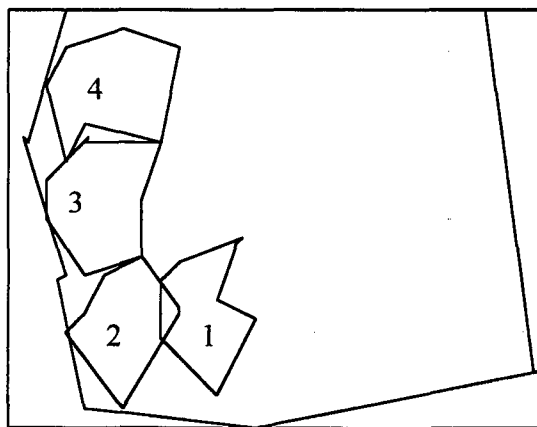


Figura 4.2 - Superposição entre peças 1 e 2.

Conforme o item 3.2, o processo de detecção começa verificando se os vértices da peça a ser inserida não estão sobrepondo algum bit ocupado da matriz de bits do plano de encaixe de contorno não convexo, e depois faz a mesma verificação com cada ponto que vai constituindo as arestas da peça a ser inserida. Mas como foi visto anteriormente nas referências [12] e [13], os testes descritos acima não são suficientes para garantir um posicionamento sem intersecções. Situações como o “Efeito Escada”, mostrado na figura 3.2, também ocorrem no algoritmo de encaixe em contorno não convexo. Nestes casos, não é possível fazer nenhum teste a mais no espaço de inteiros e deve-se recorrer a cálculos no espaço dos reais, para definir se não haverá realmente nenhuma intersecção entre as matrizes de bits. Toma-se as coordenadas dos segmentos retas no espaço dos números reais e usa-se a formulação de intersecção entre segmentos de retas paramétricas para calcular a possível

intersecção entre a peça a ser encaixada e aquelas já encaixadas. Esta metodologia será explicada a seguir.

4.2.3 - Teste de Intersecção com Segmentos de Retas Paramétricos

Seja um segmento de reta gerado pelos pontos $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$. A representação deste segmento de reta é dado através de uma equação paramétrica, que pode ser expressa na seguinte forma:

$$\text{reta } P_0P_1 \quad \begin{cases} x = x_0 + t.(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t.(y_1 - y_0) \end{cases} \quad (4.1)$$

O parâmetro t representa a posição de um ponto qualquer (x, y) , pertencente ao segmento reta, em relação aos pontos P_0 e P_1 , isto é, se $t = 0$ o ponto (x, y) estará em P_0 , se $t = 1$ o ponto (x, y) estará em P_1 . Portanto, os valores de t entre 0 e 1 estarão na reta entre os pontos P_0 e P_1 . A figura 4.3 mostra pontos sobre e fora do intervalo de P_0 e P_1 . Essa figura busca exemplificar o conceito acima desenvolvido, onde valores fora do intervalo P_0 e P_1 apresentam valores $t < 0$ e $t > 1$.

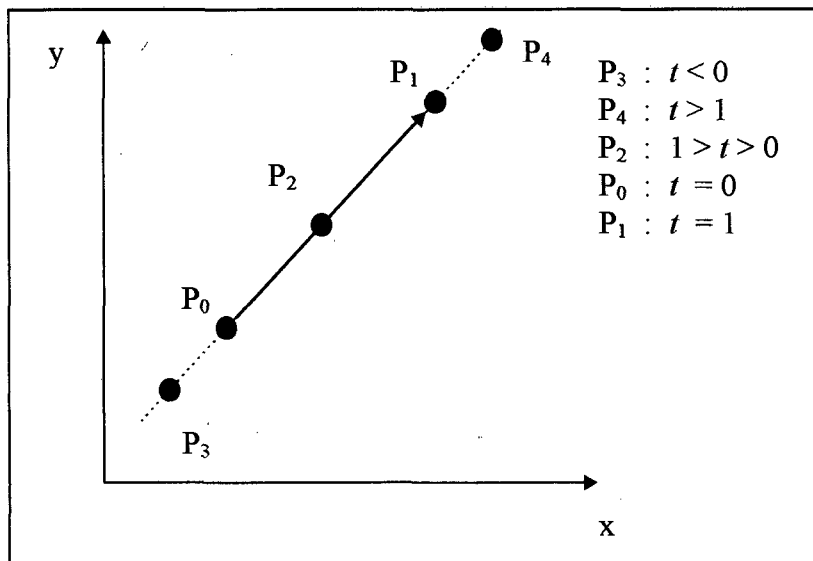


Figura 4.3 - Valores do parâmetro t .

Para calcular a intersecção entre duas retas, conforme figura 4.4, usa-se as seguintes equações paramétricas:

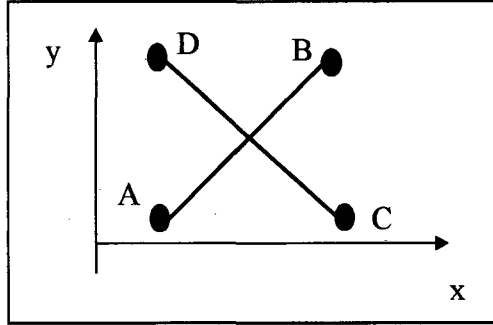


Figura 4.4 - Intersecção entre duas retas.

Definição para a reta AB :

$$\begin{cases} x = x_A + t_{AB} \cdot (x_B - x_A) \\ y = y_A + t_{AB} \cdot (y_B - y_A) \end{cases} \quad (4.2)$$

Definição para reta CD :

$$\begin{cases} x = x_C + t_{CD} \cdot (x_D - x_C) \\ y = y_C + t_{CD} \cdot (y_D - y_C) \end{cases} \quad (4.3)$$

Igualando-se as equações encontra-se os valores de t_{AB} e t_{CD} :

$$\begin{aligned} x_A + t_{AB} \cdot (x_B - x_A) &= x_C + t_{CD} \cdot (x_D - x_C) \\ y_A + t_{AB} \cdot (y_B - y_A) &= y_C + t_{CD} \cdot (y_D - y_C) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$t_{CD} = \frac{(y_B - y_A) \cdot (x_C - x_A) + (y_A - y_C) \cdot (x_B - x_A)}{(y_D - y_C) \cdot (x_B - x_A) - (x_D - x_C) \cdot (y_B - y_A)} \quad (4.5)$$

$$t_{AB} = \frac{x_C - x_A + t_{CD} \cdot (x_D - x_C)}{(x_B - x_A)} \quad (4.6)$$

De acordo com a figura 4.4, a intersecção entre os dois segmentos de reta ocorre se os valores calculados para t_{CD} e t_{AB} satisfizerem as condições:

$$0 < t_{CD} < 1 \quad (4.7)$$

$$\text{e } 0 < t_{AB} < 1 \quad (4.8)$$

4.2.4 - Uso do Raio que Circunscreve a Peça

O teste de intersecção com segmentos de retas deve ser aplicado entre a peça a ser encaixada e todas as peças já encaixadas, e em cada posição candidata ao encaixe da peça que esta sendo testada. No entanto, isto torna o processo muito lento, à medida que a coleção de peças já encaixadas for crescendo. Para melhorar e acelerar o algoritmo de teste de intersecção é possível adicionar um novo procedimento, que visa selecionar as possíveis peças vizinhas à posição candidata ao encaixe.

O procedimento de otimização deste processo consiste em selecionar somente peças já encaixadas que estão próximas a peça a ser inserida. Então, com os valores dos raios de cada peça e o valor da distância entre os pontos de referência de cada peça com o ponto de referência da peça a ser encaixada determina-se quem são as peças vizinhas à peça que será encaixada.

O critério para achar os vizinhos é o seguinte: se a soma dos raios entre uma peça já encaixada e a peça candidata ao encaixe for maior do que a distância entre os pontos de referência das duas, mais uma tolerância, a peça já encaixada é uma vizinha que deve ser habilitada ao teste de intersecção. Ou seja, toda vez que existe intersecção entre as circunferências das peças elas são consideradas potencialmente vizinhas. As demais que não obedecem este critério são descartadas do cálculo de intersecção.

Executando este procedimento para todas as peças já encaixadas, obtém-se um conjunto de peças vizinhas com as quais o teste de intersecção deve ser efetuado. Se

nenhuma aresta das peças vizinhas não intercepta nenhuma aresta da peça candidata ao encaixe, a posição testada é uma posição de encaixe para a peça candidata.

4.2.5 - Otimização através do posicionamento da peça na matriz de bits da região de encaixe

Como foi citado no item 2.3.2, a peça a ser inserida varre toda a área do retângulo que envolve a região de encaixe. O procedimento de detecção de superposição vai sendo aplicado à medida que a peça é deslocada na matriz de bits. Este processo é demorado quando os testes de detecção são feitos fora da região de encaixe, como mostra a figura 4.5.

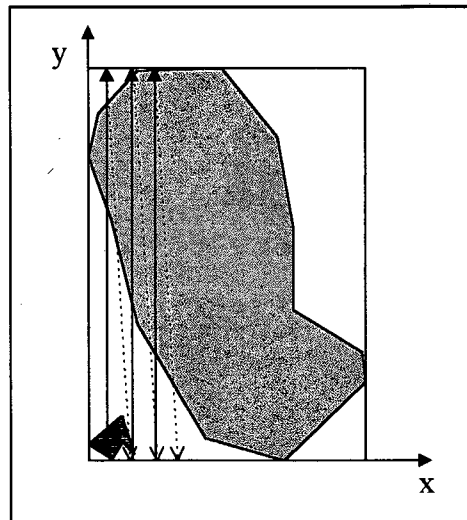


Figura 4.5 - Peça percorre todo o retângulo que envolve o infesto.

Com a intenção de diminuir o tempo de processamento, foi criada uma rotina para definir posições onde começam e terminam os testes de detecção de superposição. Estas posições são determinadas pelo cálculo de intersecção entre uma linha vertical, pelo qual a peça irá percorrer, e as arestas do contorno do infesto. Conforme figura 4.6, a peça a ser inserida é colocada após o primeiro ponto de intersecção e a partir desta posição até o último ponto de intersecção executa-se os

testes de detecção. Assim, antes que a peça a ser inserida percorra um novo deslocamento vertical, repete-se todo cálculo de intersecção mencionado acima.

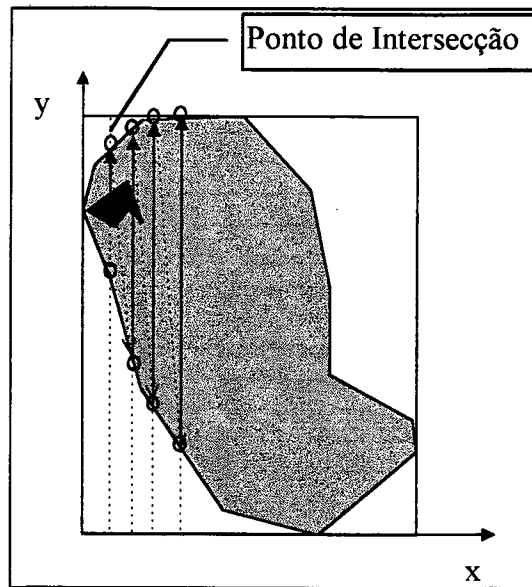


Figura 4.6 - Peça percorrendo entre os pontos de intersecção.

4.3 - Encaixe por Deslizamento

Nesta seção vão ser desenvolvidos os procedimentos e cálculos necessários para efetuar o encaixe de peças pelo método de deslizamento de peças [13]. Este algoritmo baseia-se no cálculo de uma distância de deslizamento entre a peça a ser encaixada e as demais já encaixadas. Para isso, diferentemente do método de intersecção, a peça deve ser colocada numa posição fora da região onde peças já estão encaixadas. O algoritmo de encaixe por deslizamento usa as informações do contorno das peças e do infesto no cálculo da distância mínima de aproximação. O cálculo da distância mínima é obtido a partir de um conjunto de informações geométricas, dentre as quais é preciso definir uma direção de deslocamento, usar procedimentos de cálculos da geometria analítica e a adaptação da técnica de Cyrus-Beck [11], usada em algoritmos de recorte. No trabalho de Dias e Segenreich [13], o

cálculo da distância de deslizamento baseia-se na utilização de uma função D , construída a partir da definição da distância de um ponto a uma reta.

4.3.1 - Teste de Intersecção pelo uso da Técnica de Cyrus-Beck

Este método consiste em calcular o ponto de intersecção entre dois segmentos de reta. A figura 4.7, mostra a geometria necessária para a aplicação do método de cálculo da intersecção entre segmentos de retas, baseada na técnica de Cyrus-Beck [11] para recorte de linhas. Assim, são mostrados: um segmento de reta AB , sobre o qual deseja calcular o ponto de intersecção, e uma reta suporte do vetor V , a qual define a direção de deslizamento. Sobre a reta suporte do vetor V é definido um ponto C e um vetor N .

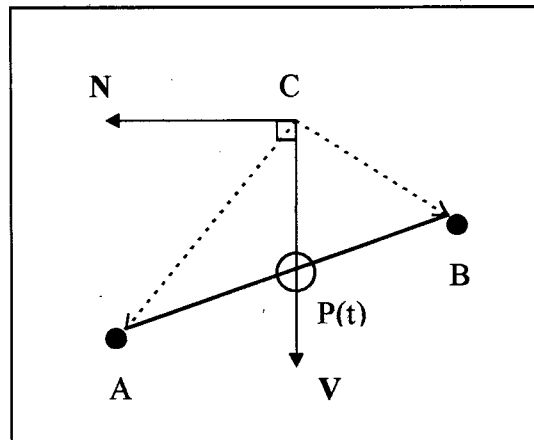


Figura 4.7 - Geometria para o cálculo da distância de deslizamento.

A Figura 4.8, abaixo, procura mostrar os elementos geométricos definidos anteriormente, no problema de encaixe. Como se pode ver, é mostrada a posição da figura que se quer deslizar em relação a uma suposta figura encaixada. Nela está sendo especificada a direção de encaixe e o respectivo vetor V , a aresta AB , o ponto C e a normal N à direção de encaixe.

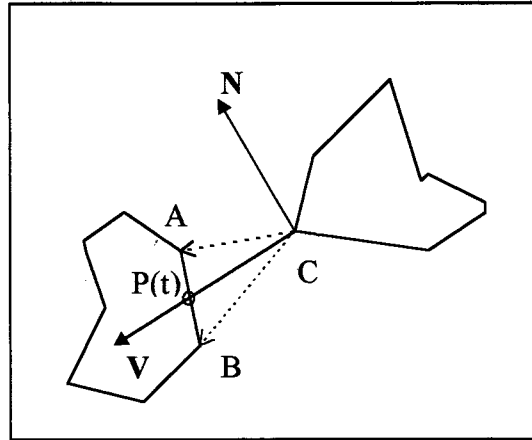


Figura 4.8 - Geometria para o cálculo da distância de deslizamento, no problema de encaixe.

Desta forma pode-se prosseguir para equacionar o cálculo da distância de deslizamento. Seja AB um segmento de reta. A forma paramétrica da reta é dada por:

$$P(t) = A + t.(B - A) \quad (4.9)$$

onde A é o ponto inicial do segmento e B o ponto final. $P(t)$ é um ponto qualquer sobre a reta suporte do segmento AB .

O cálculo do ponto de intersecção sobre o segmento de reta AB é feito partindo-se de C e percorrendo sobre a reta suporte do vetor V , até encontrar o ponto $P(t)$ sobre a reta AB . Para isso, observa-se que o segmento de reta $CP(t)$ e a normal N são perpendiculares entre si pela própria construção. Considerando o produto escalar entre estes dois vetores igual a zero, pode-se escrever:

$$N \bullet [P(t) - C] = 0 \quad (4.10)$$

aplicando-se a equação (4.9) na equação. (4.10), obtém-se:

$$N \bullet [A + t.(B - A) - C] = 0 \quad (4.11)$$

e daí, que o valor t no ponto de intersecção é dado por:

$$t = \frac{N \bullet (A - C)}{N \bullet (B - A)} \quad (4.12)$$

Obtido o valor de t , é preciso verificar se o seu valor corresponde a uma intersecção, dentro do intervalo $[0,1]$, definido pelos vértices A e B . Pode ocorrer que para algumas arestas, o valor de t seja dado fora do intervalo $[0,1]$, conforme mostra a figura 4.9. Este valores não interessam e devem ser descartados. A distância de deslocamento é calculada pela norma do vetor definido pelos pontos $P(t)C$. Este cálculo deve ser efetuado para cada vértice da peça a ser encaixada em relação a todas as arestas da peça já encaixada e vice-versa. Todas as peças vizinhas devem ser submetidas ao mesmo procedimento. Isso determina uma coleção de distâncias de deslizamento. A distância de deslizamento será dada pela menor distância da coleção calculada. Isto garante que o movimento em questão evitará que a peça a ser encaixada sobreponha alguma peça já encaixada.

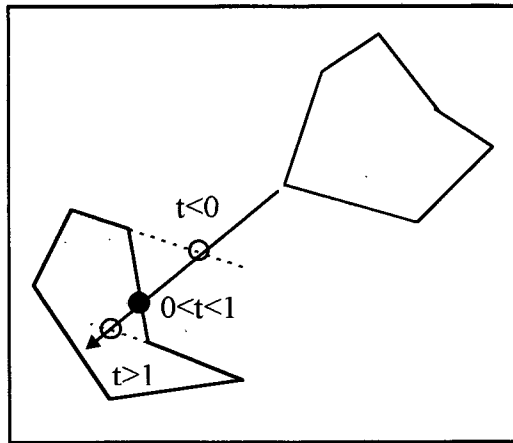


Figura 4.9 - Valores de t no cálculo da distância de deslizamento na direção do vetor V .

4.3.2 - Otimização no Encaixe por Deslizamento:

O processo de otimização no encaixe por deslizamento visa selecionar arestas potencialmente interceptantes das peças já encaixadas e do infesto. A técnica utilizada por esta dissertação foi aplicada por Dias e Segenreich [13] e é explicado no item d de 3.3.3. Para esta técnica foi implementada uma regra para seleção de arestas do infesto. As normais das arestas do infesto estão voltadas para o interior do infesto, conforme figura 4.10. A seleção de arestas interceptantes do infesto usa o mesmo produto escalar para definir as arestas potencialmente interceptantes das peças já encaixadas:

$$-V \bullet n_{\text{inf}} > 0 \quad (4.13)$$

onde n_{inf} é a normal ao vetor definido pela aresta do infesto. Na figura 4.10, as linhas mais espessas são arestas candidatas à colisão com a figura deslizante.

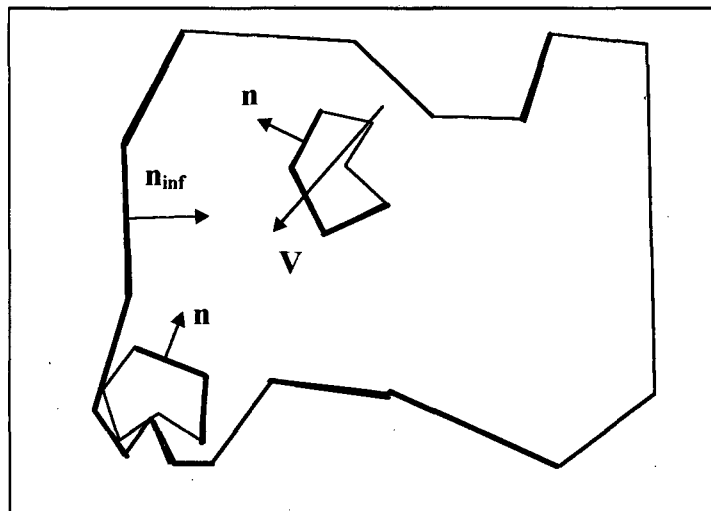


Figura 4.10 - Exemplo de arestas interceptantes.

Com esta rotina tornou-se possível selecionar somente arestas potencialmente interceptantes. Portanto o algoritmo de deslizamento só trabalhará com as arestas selecionadas acelerando o tempo de processamento.

4.4 - Colocação das Peças na Região de Encaixe:

O processo de inserção de uma peça na região de encaixe, como nos algoritmos propostos por Dias [12], é por varredura, isto é, a peça percorre toda a região de encaixe, que primariamente é uma área retangular, até encontrar uma posição, onde ela não sobreponha peças já encaixadas e não esteja fora da área não convexa de encaixe. A busca por esta posição deve ser feita em toda a superfície da área de encaixe, e tem por objetivo de garantir uma ocupação densa. A detecção de sobreposição é executada pelo método de intersecção de matrizes, que grosseiramente determina uma posição de encaixe. A decisão final é determinada pelo teste de intersecção, através de equações paramétricas, descrito no item 4.2.3. A peça percorre o plano de encaixe, de baixo para cima e da esquerda para a direita, até que ela encontre uma posição não ocupada. Encontrada uma posição sem sobreposição, aplica-se o teste de intersecção com equações paramétricas para verificar se não há alguma intersecção, usando as coordenadas de vértices das arestas em valores reais. Caso haja alguma intersecção, a posição é rejeitada e desloca-se a peça para próxima posição e repete-se todo o procedimento de detecção de sobreposição. Se a posição testada não apresentar nenhuma sobreposição, a peça é deslizada para obter maior aproveitamento do material.

Os procedimentos de detecção de sobreposição e deslizamento foram realizados com a peça em uma só orientação, isto é, a peça não foi girada para experimentar outras possíveis posições de encaixe. Na busca de um encaixe eficiente, foi acrescentado um procedimento que rotaciona a peça, em torno de um eixo colocado no seu próprio ponto de referência e perpendicular ao plano de encaixe. Para cada ângulo repete-se todo o procedimento de encaixe citado no parágrafo anterior. Assim, obtêm-se uma lista de posições e orientações de encaixe da mesma

peça. A partir desta lista seleciona-se o melhor encaixe e a peça, na sua orientação e posição de encaixe, é definitivamente armazenada na matriz de bits. No próximo item será mostrado como os ângulos de teste são determinados e também como é selecionado o melhor encaixe.

4.4.1 - Definição da Orientação da Peça no Encaixe

A priori, precisa ser estabelecido o número de orientações da peça que devem ser testadas no procedimento de encaixe. Ou seja, pode-se incrementar os ângulos de rotação para possibilitar a obtenção de "melhores" posicionamentos da peça no encaixe. Para obter isso, serão usadas duas variáveis: a primeira, Rot , que define o incremento no ângulo de teste. O valor positivo é definido para rotações no sentido anti-horário. A segunda variável é dada pela rotação máxima, $Rotmax$, que se permite para o teste desejado. Desta forma, o número de orientações z que cada peça será testada na área de encaixe fica dada por:

$$\begin{cases} z = \frac{Rotmax}{Rot} + 1, Rotmax < 360^\circ \\ z = \frac{Rotmax}{Rot}, Rotmax = 360^\circ \end{cases} \quad (4.14)$$

Assim a sequência de ângulos para o conjunto de orientações i é dado por:

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, (z - 1) \\ \alpha_0 = 0^\circ \\ \alpha_i = \alpha_{i-1} + Rot \end{cases} \quad (4.15)$$

em que α_i é o ângulo da orientação i . A figura 4.11 mostra uma peça com suas respectivas orientações a serem testadas.

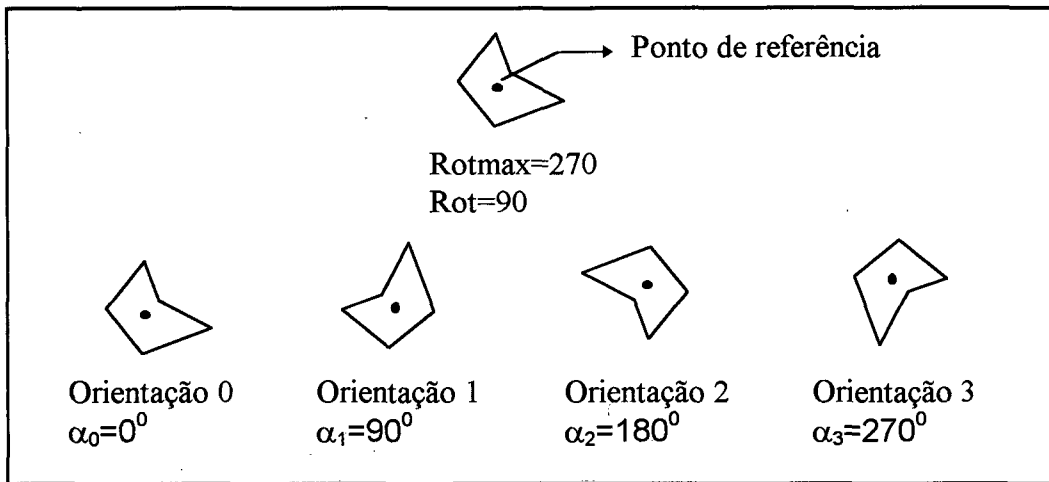


Figura 4.11 - Exemplo de orientações de uma peça a serem testadas.

Assim sendo, usando o conjunto de orientações $\{\alpha_i\}$ obtém-se diferentes posições de encaixe para uma mesma peça. Para este grupo de posições de encaixe deve ser aplicado um critério de seleção para definir a orientação da peça que forneça a melhor posição de encaixe. O critério de avaliação é baseado na comparação entre as áreas retangulares geradas pelas orientações da peça no plano de encaixe. Uma peça na posição de encaixe determina, por si só, um retângulo que a circunscreve na área de encaixe como mostra a figura 4.12. O retângulo de comparação é definido pelo vértice esquerdo inferior, na origem do sistema de coordenadas, e pelo vértice dado pelas coordenadas da abscissa do vértice mais à direita da peça, e a maior ordenada dos vértices da peça. Este último vértice define respectivamente a largura e a altura do retângulo. Para cada orientação da peça tem-se a área do retângulo diferente. A posição definitiva da peça no encaixe é definida pela orientação que gerar um retângulo com menor área. Isso garante um rendimento de encaixe maior para a posição escolhida. No caso de haver duas posições com a mesma área escolhe-se a primeira como posição de encaixe.

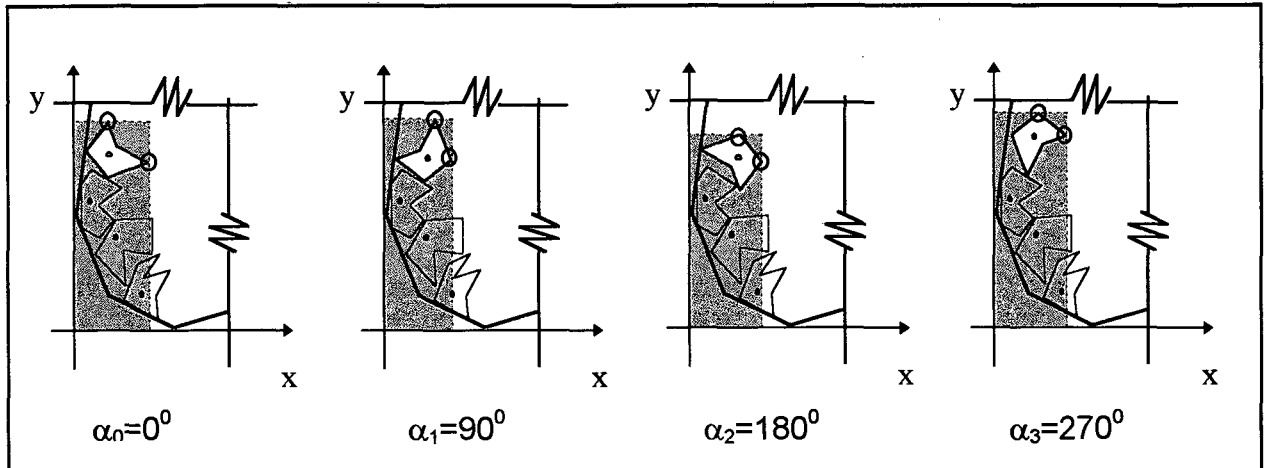


Figura 4.12 - Orientações da peça depois de encaixadas e os respectivos retângulos de avaliação.

4.4.2 - Encaixe de Peças do Mesmo Tipo

Na maioria dos processos de encaixe, um conjunto de peças contém várias delas com as mesmas características. Isto é, mesma forma, área, número de vértice e assim por diante. Antes de começar o procedimento de encaixe, cada tipo de peça tem uma certa quantidade a ser encaixada. Como o conjunto de peças são ordenadas, por algum critério, conseqüentemente, o algoritmo tenta primeiramente encaixar todas as peças de um mesmo tipo e para depois encaixar as demais.

As áreas de encaixe não convexas são formadas por contornos fechados, isto é, tem área limitada. Neste caso, não é possível usar a mesma estratégia de encaixe em áreas retangulares, que teoricamente, apresentam um comprimento livre para encaixe. Por exemplo, num rolo de um determinado material todas as peças podem ser inseridas. Já numa área não convexa algumas peças podem sobrar. Portanto, existem situações em que somente um subconjunto de peças do mesmo tipo são encaixadas no tipo de problema que está sendo resolvido. Assim, o algoritmo estabelece a estratégia de que no momento que as peças, de um mesmo grupo, isto é, do mesmo tipo, não podem ser mais encaixadas, para os testes já feitos, passa-se a tentar encaixar as peças de outro tipo.

Para evitar os testes desnecessários, logo que uma peça de um grupo não é encaixada, os testes de encaixe passam a ser realizados com peças de outro tipo. Assim, reduz-se o tempo de processamento do algoritmo.

4.4.3 - Encaixe em Regiões com Defeitos ou Furos

A identificação de regiões com defeitos ou furos é uma tarefa muito comum em alguns ramos industriais tais como metal-mecânica, têxtil e calçadista. Os defeitos e furos são representados como polígonos formados por vértices e segmentos de retas, da mesma forma que foi definido para peças a serem encaixadas, no Capítulo 2. Aproveitando-se destas características, os defeitos e furos podem ser reconhecidos como peças já encaixadas, possibilitando que sejam detectados pelos métodos abordados anteriormente.

No entanto, constatou-se que o método de Intersecção de Matrizes não é eficiente, quando a peça a ser inserida é maior que o defeito ou furo. Os métodos de intersecção de matrizes aplicados até aqui, falham, porque eles não usam o teste com pontos interiores. Para evitar o teste com pontos interiores e acelerar o processo de determinação de intersecções, foi desenvolvida uma rotina que usa cálculos de intersecção e um procedimento baseado na rotina de preenchimento de polígonos [16].

Para desenvolver o processo de detecção usa-se um segmento de reta horizontal, definido pelos pontos A e B, pertencentes ao contorno do polígono da região defeituosa ou furo, conforme a figura 4.13.

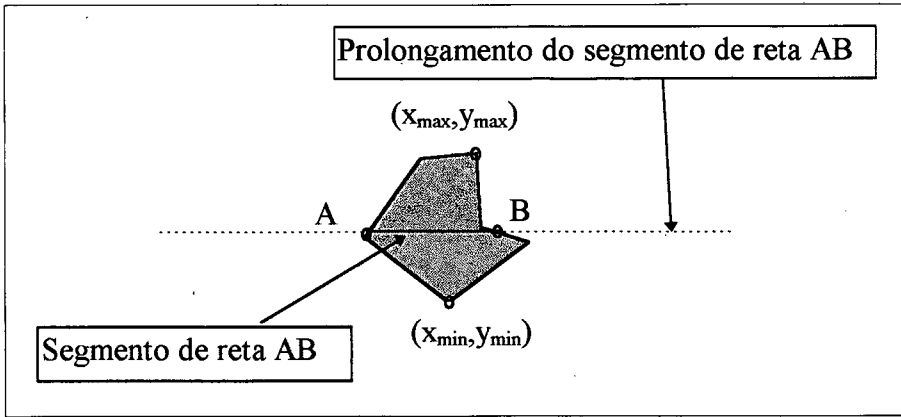


Figura 4.13 - Segmento de reta horizontal do polígono da região defeituosa.

O segmento de reta AB pode ser expresso por uma equação paramétrica da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x_A + t_{AB} \cdot (x_B - x_A) \\ y = y_A = y_B = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \end{cases} \quad (4.16)$$

onde y_{max} é a ordenada do vértice mais acima e y_{min} é a ordenada do vértice mais abaixo do polígono do defeito.

O teste de sobreposição consiste em verificar se os prolongamentos do segmento de reta AB interceptam algumas arestas da peça a ser inserida. Para executar o cálculo de intersecção, deve-se usar uma segunda equação que serve para expressar os segmentos de reta das arestas da peça a ser inserida:

$$\begin{cases} x = x_{i-1} + t \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ y = y_{i-1} + t \cdot (y_i - y_{i-1}) \end{cases} \quad (4.17)$$

Igualando-se as equações (4.16) e (4.17) obtém-se:

$$t = \frac{(y_A - y_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})} \quad (4.18)$$

$$t_{AB} = \frac{x_{i-1} - x_A + t \cdot (x_i - x_{i-1})}{(x_B - x_A)} \quad (4.19)$$

Aplicando-se a equação 4.18 para cada dupla de vértices que formam uma aresta da peça a ser inserida, é possível afirmar se aresta intercepta, ou não, os prolongamentos do segmento de reta AB. As arestas são consideradas interceptantes quando os valores de t estiverem no intervalo:

$$0 < t < 1 \quad (4.20)$$

A detecção de intersecção entre os prolongamentos do segmento da reta AB e as arestas da peça a ser inserida não são suficientes para confirmar a sobreposição, pois é necessário calcular, através da equação 4.19, o valor do parâmetro t_{AB} para cada aresta interceptante. A figura 4.14 mostra três situações possíveis, de acordo com os valores de t_{AB} .

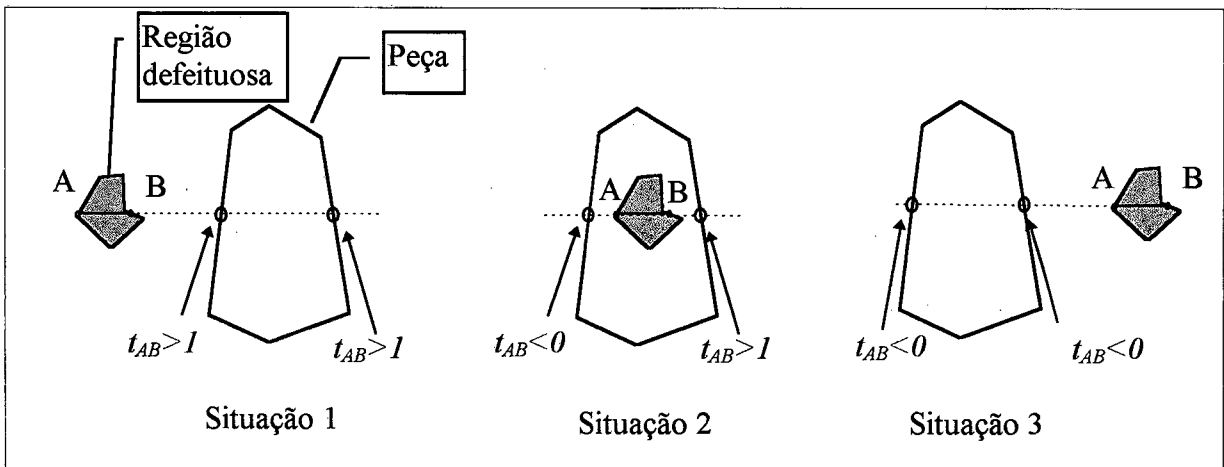


Figura 4.14 - Interpretação geométrica dos valores de t_{AB} .

Na situação 1, duas arestas da peça são interceptadas pelo prolongamento do segmento de reta AB, cujos valores de t_{AB} de cada intersecção são maiores que um. Isso nos diz que a peça está à direita do defeito. Na situação 3, os valores de t_{AB} nas intersecções são negativos. Isso nos diz que a peça está à esquerda do defeito. Se todas intersecções do prolongamento AB com as arestas apresentarem valores de t_{AB} maiores que um ou todos negativos, a peça está à direita ou à esquerda do defeito. Já

a situação 2 tem um valor t_{AB} menor que zero e um outro com valor maior que um, isso caracteriza uma superposição da peça a ser inserida sobre o defeito.

Quando a peça é não convexa é possível ocorrer mais de duas intersecções entre o prolongamento do segmento de reta AB e arestas da peça a ser inserida. Portanto, torna-se necessário aplicar mais um procedimento para detecção de superposição. O procedimento é baseado na rotina de preenchimento de polígonos [16] cujo objetivo é informar se os *pixels* de uma *scan line* estão dentro ou fora do polígono. Aqui, irá informar se o defeito está dentro ou fora de uma peça não convexa. O processo consiste em contar o número de intersecções no lado esquerdo e direito do defeito, isto é, número de parâmetros t_{AB} negativos e maiores que um. Usa-se uma variável k com o número de parâmetros t_{AB} negativos e uma variável q com o número de parâmetros t_{AB} maiores que um. Na figura 4.15, as variáveis k e q são números pares indicam que o defeito não está sendo sobreposto.

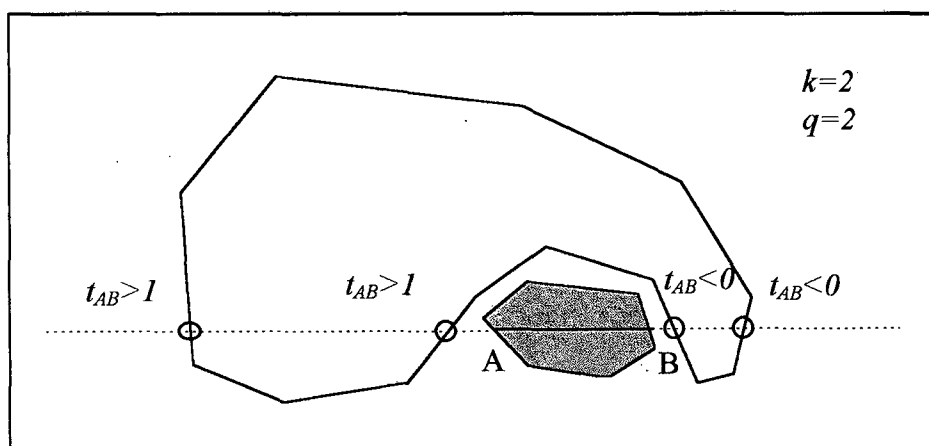


Figura 4.15 - Região defeituosa na região côncava da peça maior.

Quando valores de k e q são ímpares, indicam que a peça está sobrepondo o defeito, conforme figura 4.16.

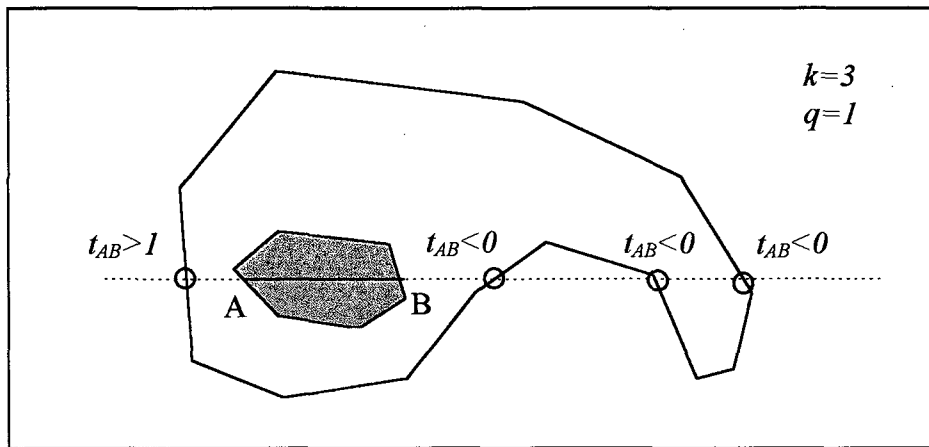


Figura 4.16 - Região defeituosa dentro da figura maior.

4.4.4 - Colocação de Peças em Áreas Pré-Definidas

Há peças que devem ser cortadas em regiões específicas do infesto. Estas regiões são caracterizadas pela qualidade superficial, pela resistência e elasticidade. Assim as regiões do infesto podem ser organizadas de forma hierárquica de acordo com estas características.

Todas as peças a serem encaixadas podem ser relacionadas a áreas específicas do infesto. Estas áreas podem ser definidas como tendo formas retangulares, para simplificar o processo de escolha e desenhadas interativamente, via *mouse*, pelo analista de encaixes.

Desta forma, um algoritmo simples de encaixe deve definir uma nova estratégia, para satisfazer a seletividade de regiões específicas. Uma ordenação das novas áreas se faz necessária, de forma a obter uma estrutura hierárquica das regiões que vão receber o encaixe, ou seja, encaixa-se primeiro peças nobres em regiões mais nobres e depois as outras regiões e assim por diante até que o infesto não consiga receber mais peças.

O procedimento de inserção de uma peça em uma área específica é formada por dois estágios. O primeiro consiste em trocar os limites de varredura da matriz de bits do infesto pelas dimensões da área selecionada. Conforme a figura 4.17, a posição inicial de pesquisa para inserir a peça por intersecção de matrizes começará

no canto esquerdo superior da região selecionada. A área mais clara corresponde a elementos nulos e a área mais escura corresponde aos elementos unitários do bitmap. A peça varre toda a região até encontrar uma posição sem sobreposição.

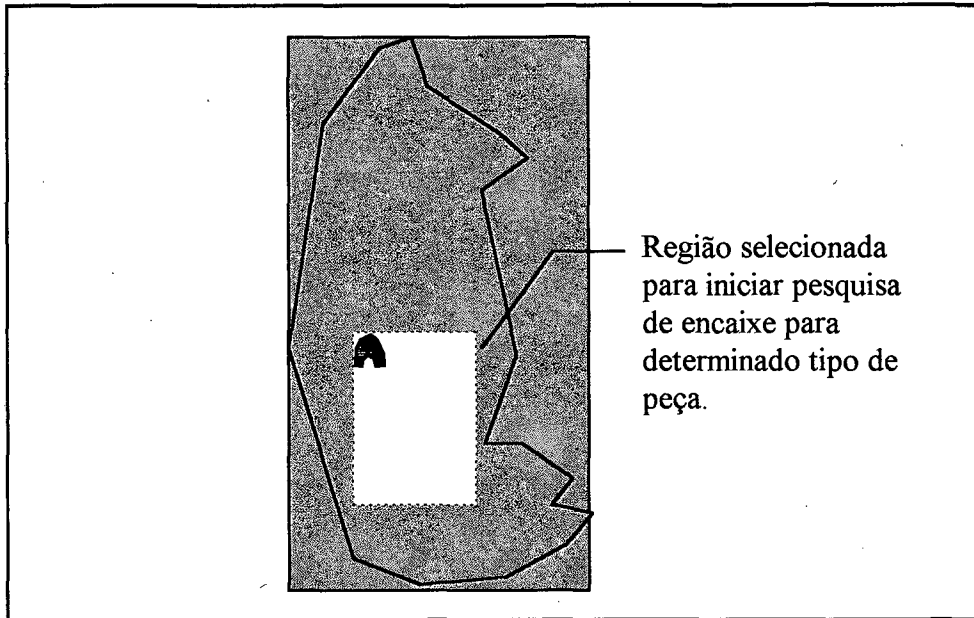


Figura 4.17 - Posição inicial de inserção.

Se a peça a ser inserida pelo primeiro estágio não for encaixada ela pode ser deslizada para uma outra área selecionada, se os critérios de uso da mesma permitirem. A figura 4.18, mostra a peça interceptando o contorno do infesto uma vez que não existe arestas para impedir tal deslocamento. Para o deslizamento executa-se o segundo estágio. Este estágio consiste em trocar o contorno do infesto original pela contorno retangular da nova região selecionada. Portanto os limites de deslizamento são estabelecidos pela área retangular como se fosse o infesto original.

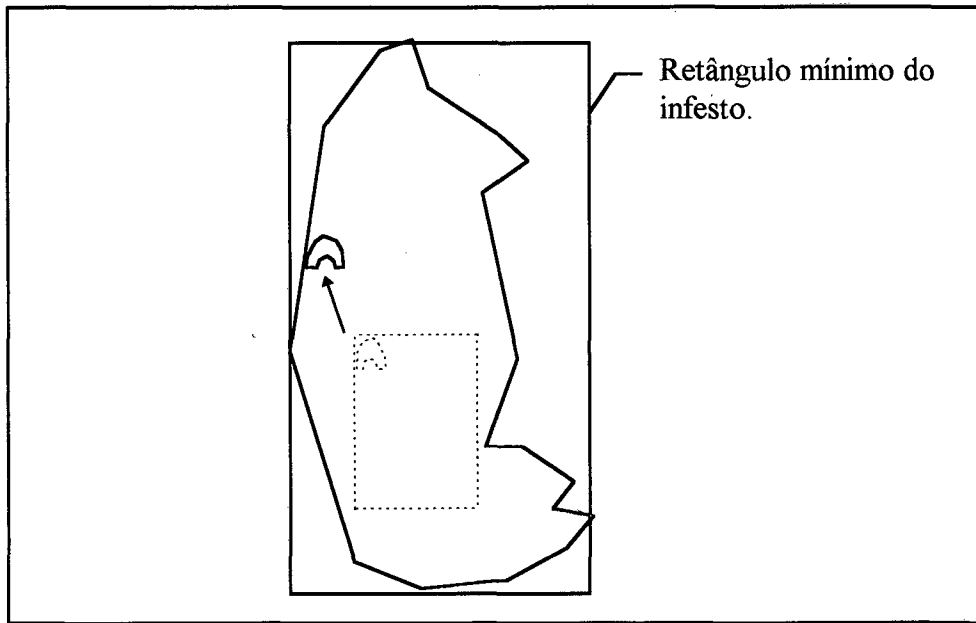


Figura 4.18 - Deslizamento fora da região selecionada.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 - Introdução

Este capítulo tem como objetivo mostrar os resultados obtidos com os algoritmos, as heurísticas e estratégias descritas anteriormente. Primeiramente, é feita uma descrição dos moldes e do infesto e depois expõe-se os resultados de uma sequência de testes.

O infesto e as peças, usados para obtenção dos resultados desta dissertação, apresentam formas geométricas comuns na indústria calçadista. O infesto representa a forma original da metade da pele de um bovino, tal como é vendido para a indústria calçadista. As peças usadas no encaixe são moldes para um sapato masculino de tamanho 40. A forma geométrica, tanto do infesto como da peça, é composta por segmentos de retas, os quais unem uma sequência de pontos fornecidos pelo digitalizador.

Os testes são realizados em três situações: o infesto sem defeitos, infesto com defeitos e encaixes de peças em regiões pré definidas. Os testes executados com infesto sem defeitos são divididos segundo quatro objetivos diferentes, os quais são: definir melhor orientação do infesto para preenchimento, definir melhor sequência de inserção das peças, buscar melhor rendimento de encaixe e buscar pelo maior número de pares de sapatos completos. Na segunda situação, encaixes no infesto com defeitos, uma parte dos testes são para definir a melhor orientação do infesto para preenchimento e na outra parte dos testes, para buscar melhor rendimento de encaixe. Na última situação, encaixe de peças em regiões pré definidas do infesto, os testes servem para mostrar algumas observações sobre este tipo de encaixe.

5.2 - Dados dos Moldes e do Infesto.

O contorno de cada figura a ser utilizada no processo de encaixe é obtido através da digitalização dos vértices e dos pontos que formam o contorno, gerando um conjunto de segmentos de retas. Os contornos curvos são aproximados por segmentação em retas. As coordenadas dos pontos e dos vértices digitalizados são separados para as respectivas peças e armazenados em um arquivo, o qual será usado pelo algoritmo de encaixe. Ele forma uma lista de coordenadas e cada lista corresponde a uma peça. Após a leitura deste arquivo, os pontos de cada figura são unidos por segmentos de retas, e podem ser visualizado num dispositivo de saída, como o monitor. Na lista de cada peça consta todas as informações da estrutura de dados fornecidos no Capítulo 2, que inclui as coordenadas do ponto de referência e raio da peça.

A figura 5.1 mostra o infesto onde as peças são encaixadas. O contorno do infesto é do tipo não convexo e foi digitalizado com 41 vértices. O infesto representa a metade da pele de um bovino e o comprimento máximo é de 2470 mm e a largura máxima é de 1235 mm.

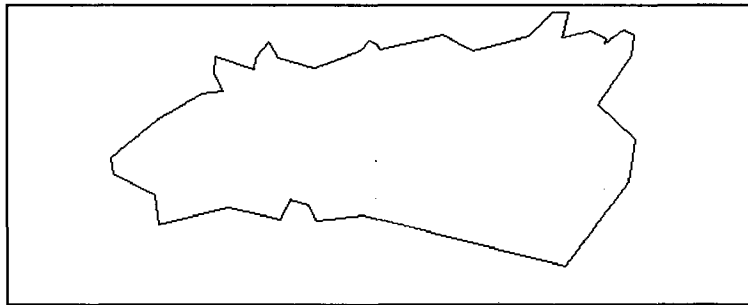
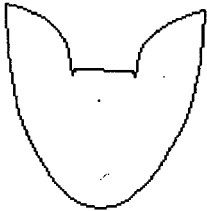







Figura 5.1 - Couro digitalizado na orientação inicial - 0°.

Os moldes utilizados neste trabalho constituem um sapato masculino tamanho 40. A tabela 5.1 mostra os desenhos dos moldes, nome, tipo de forma geométrica, comprimento vertical, comprimento horizontal, área e o número de pontos digitalizados.

Tabela 5.1 - Moldes do sapato.

Moldes	Tipo	Comprimento vertical (mm)	Comprimento lateral (mm)	Área (mm ²)	Número de vértices*
Gáspea 	não convexa	205	200	24692	36
Talão 	não convexa	100	136	7630	23
Lateral 	não convexa	156	75	6732	24
Lingueta 	convexa	76	64	4424	14
Banana 	não convexa	130	52	4016	18
Reforço 	não convexa	86	39	2452	17

* adicionado o ponto de referência.

Um par de sapato é também constituído por peças espelhadas, isto é, um par tem uma peça para o pé direito e outra para o esquerdo. Os testes de encaixe foram feitos com 220 peças, que constituem 10 pares de sapato, de acordo com a tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Peças a serem inseridas.

Peça	Número de Identificação	Número de peças para 10 pares
Gáspea	1	10
Gáspea (espelhado)	2	10
Talão	3	10
Talão (espelhado)	4	10
Lateral	5	20
Lateral (espelhado)	6	20
Lingueta	7	10
Lingueta (espelhado)	8	10
Banana	9	40
Banana (espelhado)	10	40
Reforço	11	20
Reforço (espelhado)	12	20
Total		220

5.3 - Testes de Encaixe sem Regiões Defeituosas

Os resultados a seguir têm o objetivo de definir uma orientação do infesto que favoreça um bom rendimento de encaixe. Para cada orientação do infesto, possibilita-se iniciar o procedimento de encaixe em uma determinada área do infesto, uma vez que as peças começam ser inseridas sempre a partir do canto esquerdo inferior do

retângulo que circunscreve o infesto. O primeiro teste é feito com o infesto na orientação original que corresponde a 0° . As peças são inseridas no infesto e obtém-se a eficiência de encaixe. No segundo teste, o infesto é girado no sentido anti-horário em um determinado ângulo, depois é preenchido com peças e finalmente anota-se o rendimento de encaixe. Este procedimento é repetido até que o próximo teste a ser executado seja a orientação inicial do infesto. Assim, com o infesto em diferentes orientações, têm-se uma coleção de resultados a serem comparados.

O tempo de processamento é medido através da leitura da hora atual registrada pelo relógio do computador. Quando inicia o processo de encaixe, o algoritmo chama uma função para leitura da hora e minutos registrados neste exato momento. O tempo lido pela função é totalmente convertido em minutos e armazenado na variável tempo1. Finalizado o processo de encaixe, novamente o algoritmo chama a função para leitura da hora e minutos atuais, faz conversão para minutos e armazena na variável tempo2. O tempo total de processamento, em minutos, é obtido através da diferença entre as variáveis tempo2 e tempo1. Todos os encaixes foram realizados em um PC com processador Pentium Intel 133MHz.

Foram feitos doze testes de encaixe com o infesto em doze orientações, isto é o infesto foi girado 30° para cada teste de encaixe, até completar 360° de giro. Em cada teste, as peças foram usadas em quatro orientações diferentes: 0° , 90° , 180° e 270° . A sequência de inserção é definida pela área das peças, isto é, as peças de maior área são inseridas primeiro e as menores áreas são inseridas por último. Os resultados obtidos são mostrados na tabela 5.3, onde são mostrados ângulos do infesto, número de peças encaixadas, tempo de processamento, número de pares de sapato e rendimento de encaixe.

Tabela 5.3 - Resultados com as peças ordenadas pela área.

Ângulo do Infesto	Número de peças encaixadas	Tempo de processamento	Número de pares sapatos	Rendimento (%)
0°	156	12 min	0	66,5
30°	165	10 min	1	67,8
60°	159	10 min	2	66,9
90°	163	15 min	1	67,7
120°	161	9 min	0	67,5
150°	156	10 min	1	66,0
180°	170	13 min	4	68,0
210°	165	9 min	3	67,4
240°	156	9 min	0	66,3
270°	165	15 min	0	68,4
300°	167	10 min	1	68,0
330°	162	9 min	0	67,3

Observando os dois testes, com infesto na orientação de 180° e 300°, nota-se que ambos os testes têm o mesmo rendimento de encaixe. Porém, o número de peças encaixadas são diferentes, isto é, o infesto com 180° tem mais peças encaixadas do que infesto na orientação de 300°. A tabela 5.4 mostra o número de peças encaixadas de cada tipo de molde para os encaixes com o infesto na orientação de 180° e 300°. As peças menores de número 9, do infesto no ângulo de 180°, ocuparam uma área equivalente às peças maiores, moldes de número 12, do teste com infesto na orientação de 300°. A orientação de 300° permitiu a inserção de peças com áreas maiores enquanto que a orientação de 180° permitiu a inserção de uma quantidade maior de peças menores.

Outra observação é quanto ao número de pares de sapatos completos obtidos em cada teste. O infesto com orientação de 180° obteve o maior número de pares completos, no entanto não foi o teste de maior rendimento

Tabela 5.4 - Número de peças encaixadas com infesto nas orientações 180° e 360°.

Peça	Número de Identificação	Peças encaixadas orientação de 180°	Peças encaixadas orientação de 300°
Gáspea	1	10	10
Gáspea (espelhado)	2	10	10
Talão	3	10	10
Talão (espelhado)	4	10	10
Lateral	5	20	20
Lateral (espelhado)	6	20	20
Lingueta	7	10	10
Lingueta (espelhado)	8	10	10
Banana	9	16	21
Banana (espelhado)	10	23	23
Reforço	11	20	20
Reforço (espelhado)	12	11	3
Total		170	167

O maior rendimento ocorre para o ângulo de infesto em 270°, que é mostrado no histograma da figura 5.2. Mas neste caso, não foi produzido nenhum par de sapatos completo, conforme tabela 5.3.

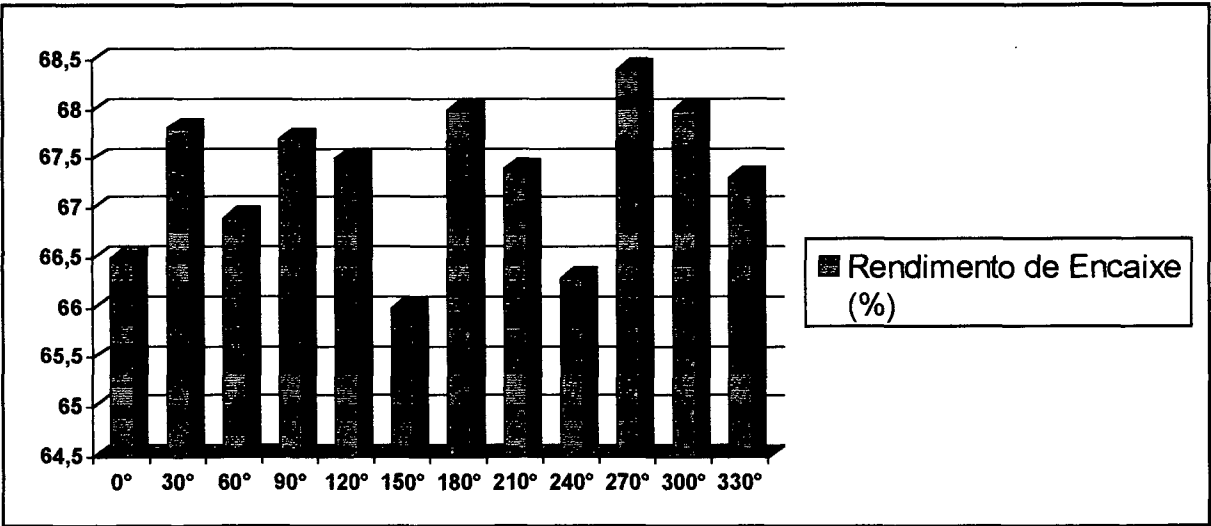


Figura 5.2 - Histograma do rendimento de encaixe para ordenação pela área.

A figura 5.3 mostra o histograma do ângulo do infesto relacionado com tempo de processamento. O teste com o melhor rendimento também é um dos mais demorados.

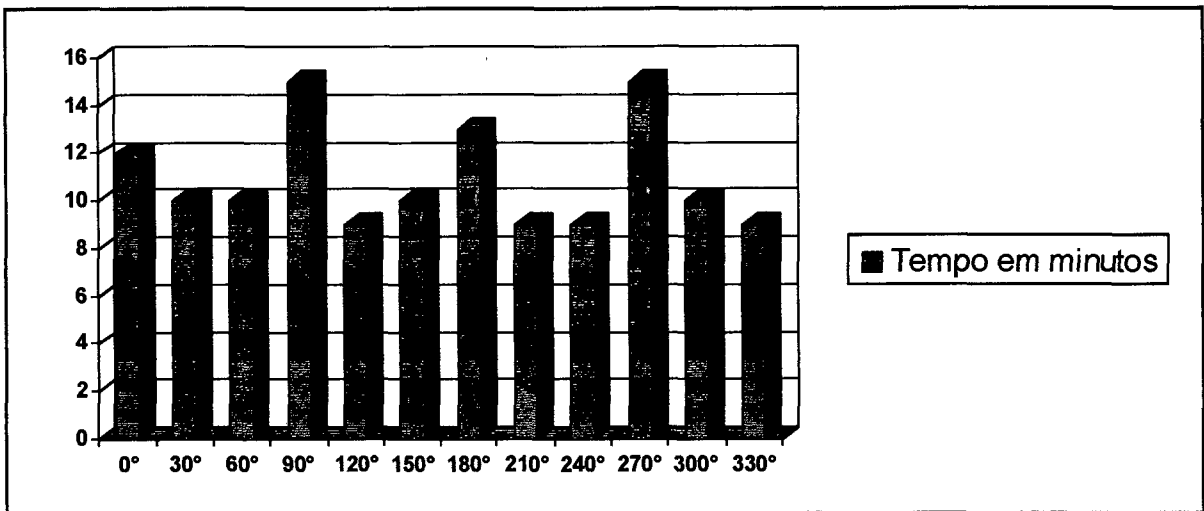


Figura 5.3 - Histograma do tempo de processamento de encaixe da ordenação pela área.

Um segundo conjunto de testes é apresentado, usando as mesmas condições iniciais, contudo, foi modificada a seqüência de inserção das peças. Nestes testes, as peças são ordenadas pelo comprimento, onde as peças de maior comprimento vertical são inseridas em primeiro e as peças de menor comprimento vertical são inseridas por último. A tabela 5.5 mostra os resultados obtidos com a ordenação pelo comprimento vertical. As figuras 5.4 e 5.5 mostram, respectivamente, os histogramas do rendimento e do tempo de processamento.

Tabela 5.5 - Resultados com ordenação pelo comprimento vertical.

Ângulo do Infesto	Número de peças encaixadas	Tempo de processamento	Número de pares	Rendimento (%)
0°	165	13 min	0	67,3
30°	162	10 min	0	66,5
60°	168	10 min	0	67,1
90°	165	16 min	0	67,2
120°	167	10 min	0	67,4
150°	157	11 min	0	65,5
180°	166	13 min	0	67,6
210°	163	10 min	0	66,4
240°	162	9 min	0	65,8
270°	170	16 min	0	67,9
300°	168	10 min	0	66,8
330°	159	10 min	0	66

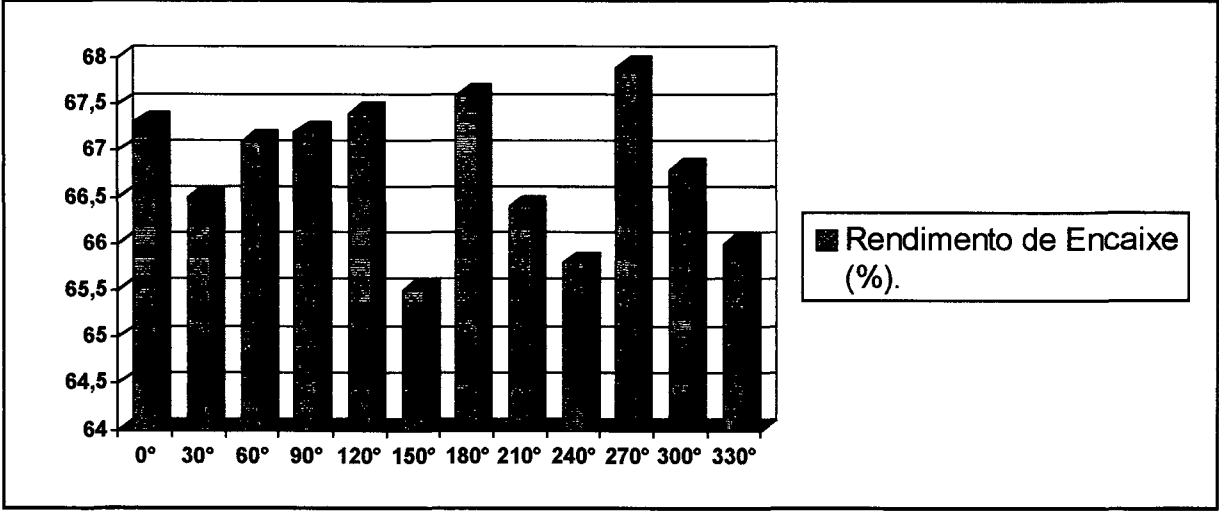


Figura 5.4 - Histograma do rendimento para ordenação pelo comprimento vertical.

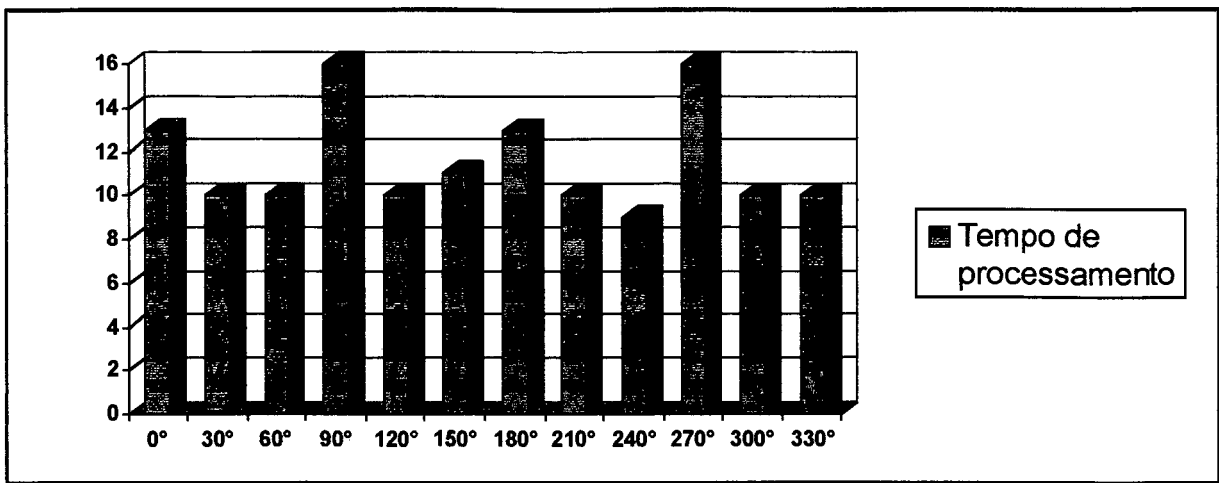


Figura 5.5 - Histograma do tempo de processamento para ordenação pelo comprimento vertical.

As peças retiradas dos encaixes com ordenação pelo comprimento vertical não formaram nenhum par de sapatos completo. Isto ocorre porque os moldes de números 8 e 9, não foram encaixados em nenhum lugar. Estes moldes apresentam o menor comprimento vertical em relação às demais peças e foram testadas por último. Porém, não restou espaço para as mesmas.

O encaixe na orientação de 120° é importante por que é um dos testes menos demorados e apresenta um bom resultado com relação a outros testes de encaixe em ângulos diferentes do infesto. Para ambos os tipos de ordenação de inserção, a orientação de 120° apresenta bons resultados em tempos reduzidos. A figura 5.6 mostra o encaixe na orientação de 120° no qual as peças foram ordenadas pelo comprimento vertical. A figura 5.7 mostra o encaixe com as peças ordenadas pela área.

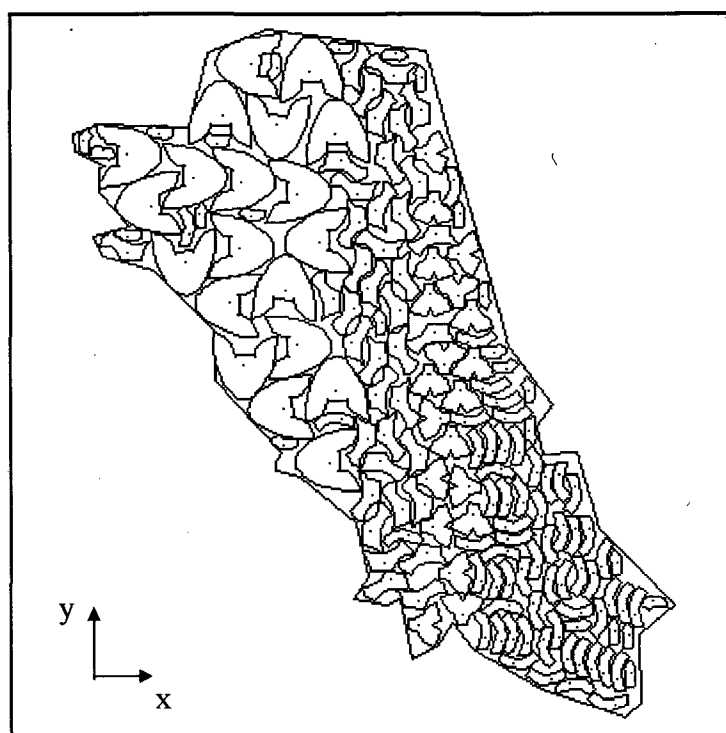


Figura 5.6 - Encaixe na orientação de 120° com peças ordenadas pelo comprimento vertical - 67,4%

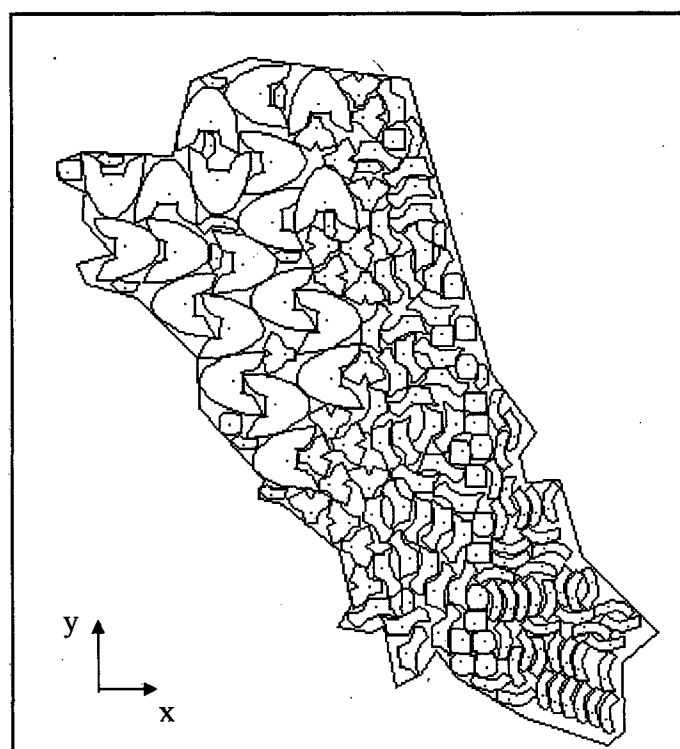


Figura 5.7 - Encaixe na orientação de 120° com ordenação pela área - 67,5%.

Para ambos os tipos de ordenação de inserção, o infesto com orientação de 270° fornece os melhores rendimentos e também são encaixes mais demorados. O melhor resultado, da ordenação pela área, apresenta um rendimento maior que obtido pelos testes feitos com ordenação pelo comprimento vertical. A figura 5.8 mostra o encaixe com melhor rendimento obtido com as peças ordenadas pelo comprimento vertical cujo tempo de processamento foi de 16 min. A figura 5.9 mostra o melhor rendimento obtido com as peças ordenadas pela área com o tempo de processamento de 15 min. Os testes acima também contribuíram para definir o tipo de ordenação a ser usada para os próximos testes.

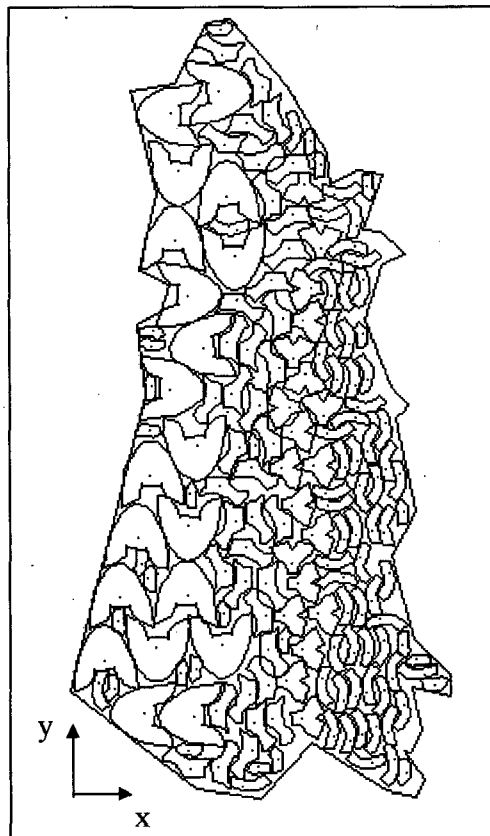


Figura 5.8 - Melhor encaixe com ordenação pelo comprimento vertical - 67,9%.

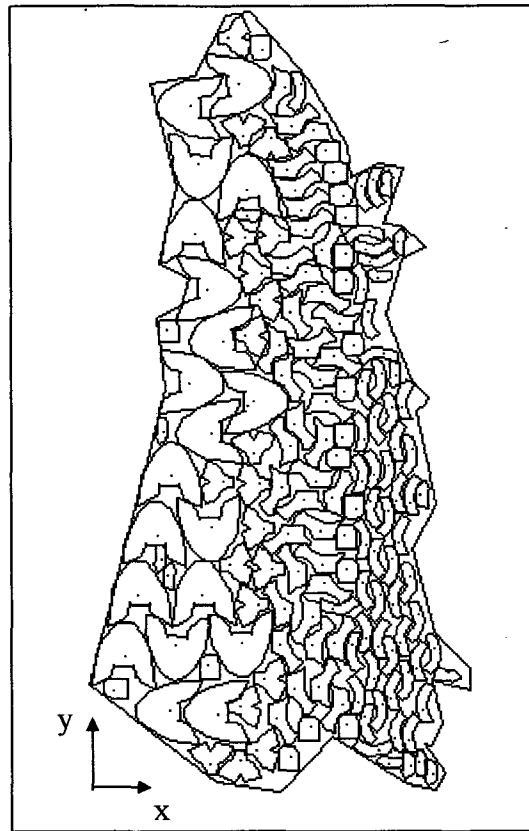


Figura 5.9 - Melhor encaixe com ordenação pela área - 68,4%.

Se levarmos em conta o processo produtivo, o melhor resultado é dado pelo ângulo de infesto de 180° , figura 5.10, onde foram encaixados o maior número de pares de sapatos.

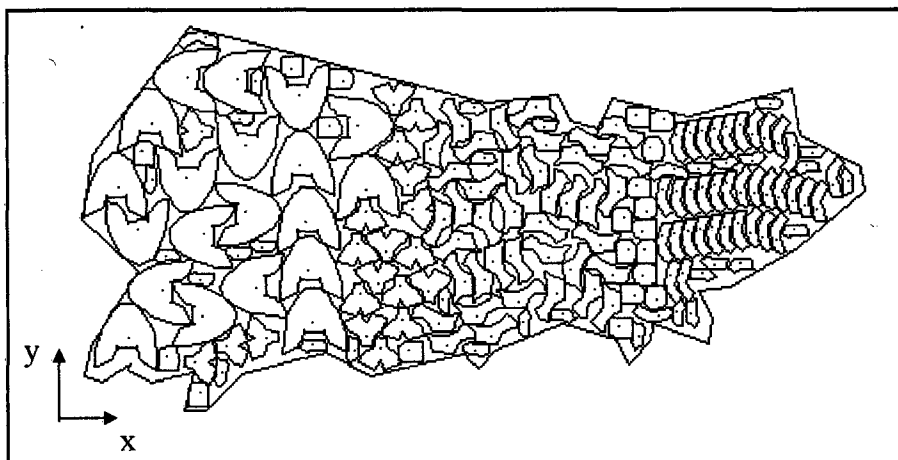


Figura 5.10 - Encaixe na orientação de 180° com ordenação pela área - 68%

5.3.1 – Influência na Variação da Rotação da Peça

Os resultados a seguir são obtidos usando o ângulo do infesto que apresentou os melhores resultados nos testes anteriores e o tipo de ordenação. A seguir, são feitos uma série de encaixes com objetivo de detectar a influência da rotação das peças no rendimento e na formação do maior número de pares de sapatos completos, num determinado couro. As equações 4.14 e 4.15 do item 4.4.1 possibilitam definir o número de orientações que as peças devem ter, antes de serem consideradas encaixadas.

Nesta fase, os resultados são obtidos com o infesto na orientação de 270° e cada teste é feito com um número maior de orientações para cada peça. Este procedimento visa verificar a relação entre rendimento de encaixe com o aumento do número de orientações para cada peça e o tempo de processamento de encaixe. As peças podem girar até 360° ($Rot_{max}=360^\circ$), sendo que cada teste um ângulo de incremento (Rot) aplicado para todas as peças. A tabela 5.6 mostra os resultados para as seguintes variáveis: o número de orientações, ângulo de incremento, e os resultados medidos: tempo de processamento e o rendimento de cada teste.

Tabela 5.6 - Resultados pelo número de orientações.

Ângulo Incremento (rot)	Número de peças encaixadas	Número de orientações de cada peça.	Tempo (min)	Número de Pares	Rendimento de Encaixe (%)
60°	167	6	21	0	68,5
50°	160	7	23	0	67,3
45°	165	8	26	0	68,5
40°	165	9	29	0	68,1
35°	170	10	33	0	69,3
30°	170	12	39	0	69,3
25°	173	14	46	0	70,1
20°	173	18	58	0	69,9
15°	171	24	77	0	69,3
10°	178	36	114	0	70,8
5°	180	72	227	0	71,4
1°	185	360	1140	0	72,3

A figura 5.11 mostra o gráfico relacionando o número de orientações por peça com rendimento de encaixe.

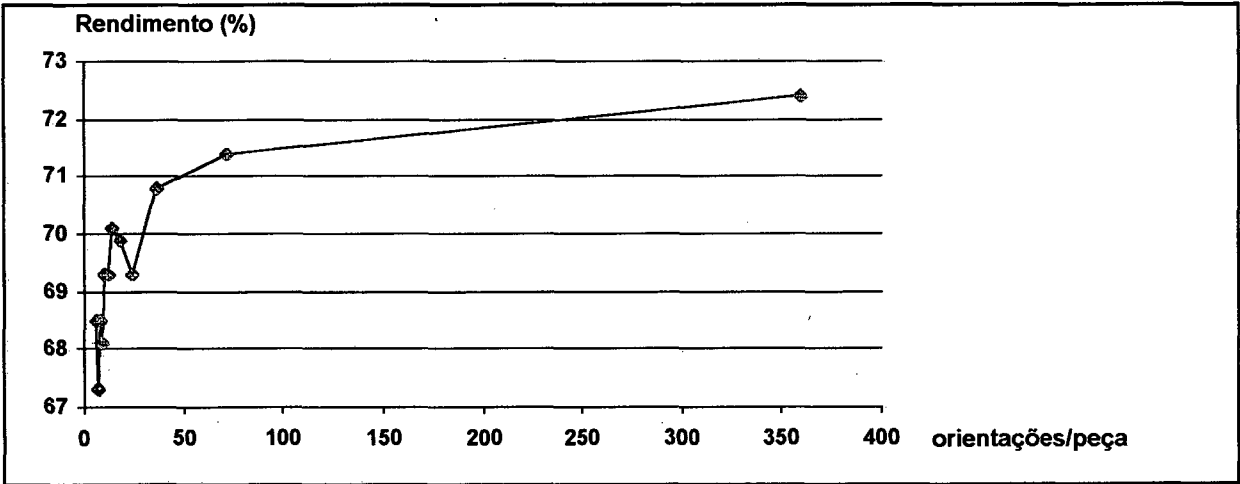


Figura 5.11-Gráfico do rendimento de encaixe com o número de orientações por peça.

Como foi visto na tabela 5.6, não é possível assegurar aumento no rendimento de encaixe à medida que o número de orientações aumentam. Para alguns ângulos **rot** intermediários o rendimento de encaixe diminui mesmo com aumento do número de giros que a peça devia dar. Logicamente que o melhor rendimento foi apresentado para um incremento no ângulo de giro de 1. Conseqüentemente, isto implicou no aumento do número de iterações por peça e no tempo de processamento. Este fato é verificado pela figura 5.12 onde mostra o gráfico relacionando o número de orientações por peça e o tempo de processamento.

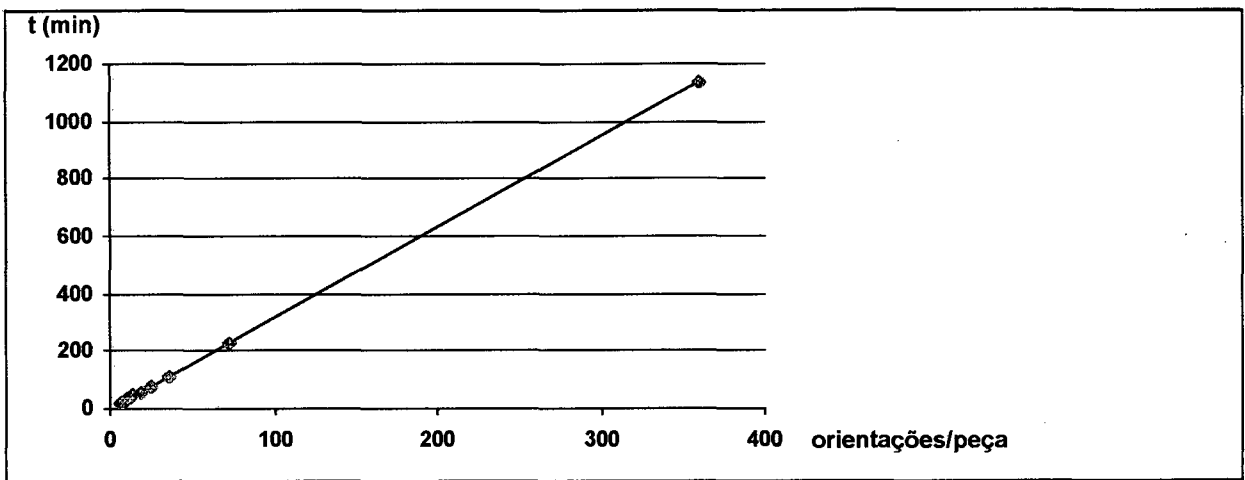


Figura 5.12 - Gráfico do tempo de processamento e o número de orientações por peça.

A figura 5.13 mostra o encaixe com maior rendimento e também o mais demorado.

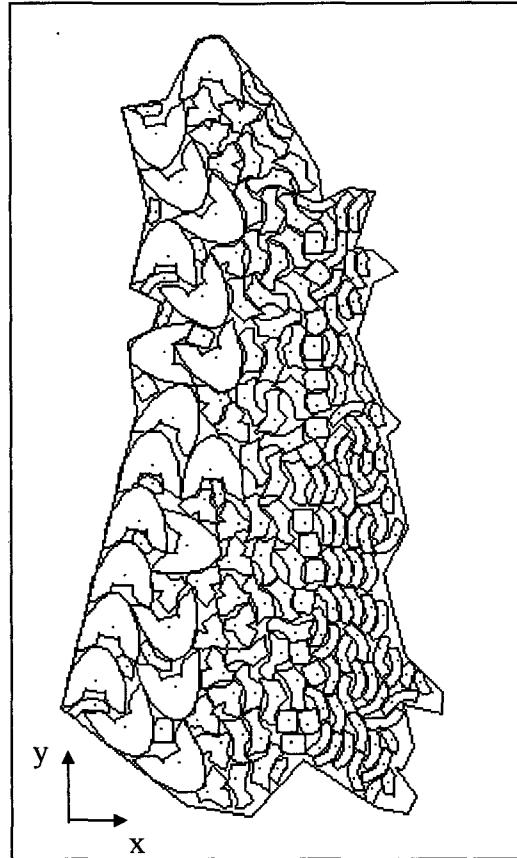


Figura 5.13 - Melhor encaixe com 360 orientações por peça - 72,3%.

5.3.2 - Busca pelo maior Número de Pares de Sapato Encaixados

Os resultados obtidos até agora visavam a obtenção do melhor rendimento de encaixe. As peças maiores são encaixadas em primeiro e depois as peças menores são encaixadas por último. Determinados tipos de peças foram classificadas como menores e não eram encaixadas por falta de espaço no infesto já preenchido. Assim, não é possível completar nenhum um par de sapato, nos resultados de maior rendimento, pois peças menores de um tipo deixaram de ser encaixadas.

Baseado na situação exposta no parágrafo anterior, surge a seguinte questão:

- Deve-se buscar o melhor rendimento de encaixe ou buscar pelo maior número de pares de sapato completos ?

Esta questão pode ser relevante para alguns setores industriais, onde a preocupação está em produzir maior número de produtos completamente acabados

em vez de buscar um menor custo com o maior rendimento de encaixe. O encaixador profissional deve escolher entre encaixar peças em busca de maior rendimento de encaixe ou encaixar em busca pelo maior número de produtos completos.

Os próximos testes deste item serão observados pelo número de pares de sapato completos que poderão ser produzidos. Mas, primeiramente, deve-se ter uma noção de quantas peças cabem dentro do infesto. De acordo com os testes anteriores, o máximo de peças encaixadas foram 185 (figura 5.13). Esta quantia equivaleria entre 8 e 9 pares de calçado, isto é, 176 a 198 peças respectivamente. A tabela 5.7 mostra o número de repetições para cada molde com 8 e 9 pares de sapato.

Tabela 5.7 - Peças a serem inseridas de 8 e 9 pares de sapato.

Peça	Número de Identificação	Nº de peças/par	Nº de peças para 8 pares	Nº de peças para 9 pares
Gáspea	1	1	8	9
Gáspea (espelhado)	2	1	8	9
Talão	3	1	8	9
Talão (espelhado)	4	1	8	9
Lateral	5	2	16	18
Lateral (espelhado)	6	2	16	18
Lingueta	7	1	8	9
Lingueta (espelhado)	8	1	8	9
Banana	9	4	32	36
Banana (espelhado)	10	4	32	36
Reforço	11	2	16	18
Reforço (espelhado)	12	2	16	18
Total			176	198

A figura 5.14 mostra o encaixe de 176 peças. As peças foram testadas com 4 orientações diferentes (0°, 90°, 180° e 270°) e ordenadas pela área. Neste encaixe,

todas as peças foram inseridas, possibilitando a produção de 8 pares de sapatos completos com um rendimento de encaixe de 62,6%. Conforme o número de peças a serem encaixadas, o espaço do infesto não é plenamente ocupado como é visto no canto direito inferior do infesto. O tempo de processamento foi de 14 min que é menor em relação aos encaixes mostrados nas figuras 5.8 e 5.9.

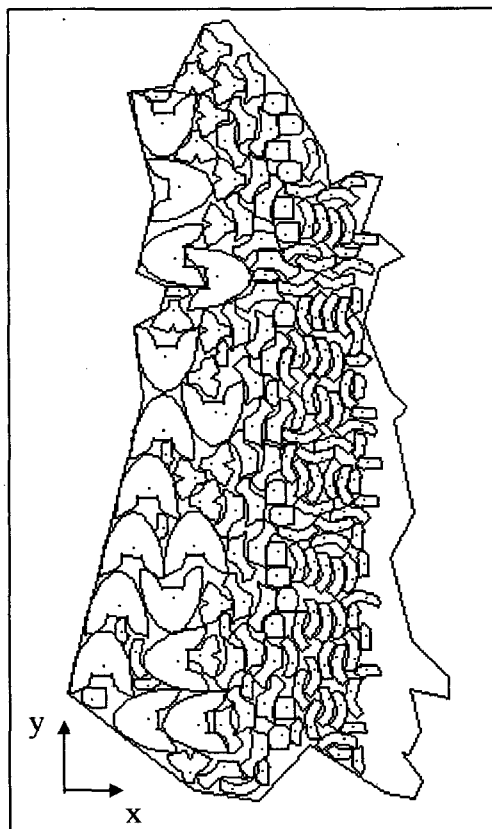


Figura 5.14 - Encaixe de 176 peças que correspondem a 8 pares - 62,6%

O encaixe com 198 peças usou as mesmas propriedades de encaixe do teste anterior, isto é, foram testadas 4 orientações por peça e as peças foram inseridas de acordo com área. Neste encaixe nenhum par de sapato foi completado, pois para completar um par são necessários no mínimo 2 peças de número 12 e somente uma peça deste tipo foi encaixada. A eficiência de encaixe foi de 68,2% o tempo de processamento foi de 15 min. Este encaixe é mostrado na figura 5.15, onde são encaixadas 181 peças e 17 peças do tipo 12 não são encaixadas.

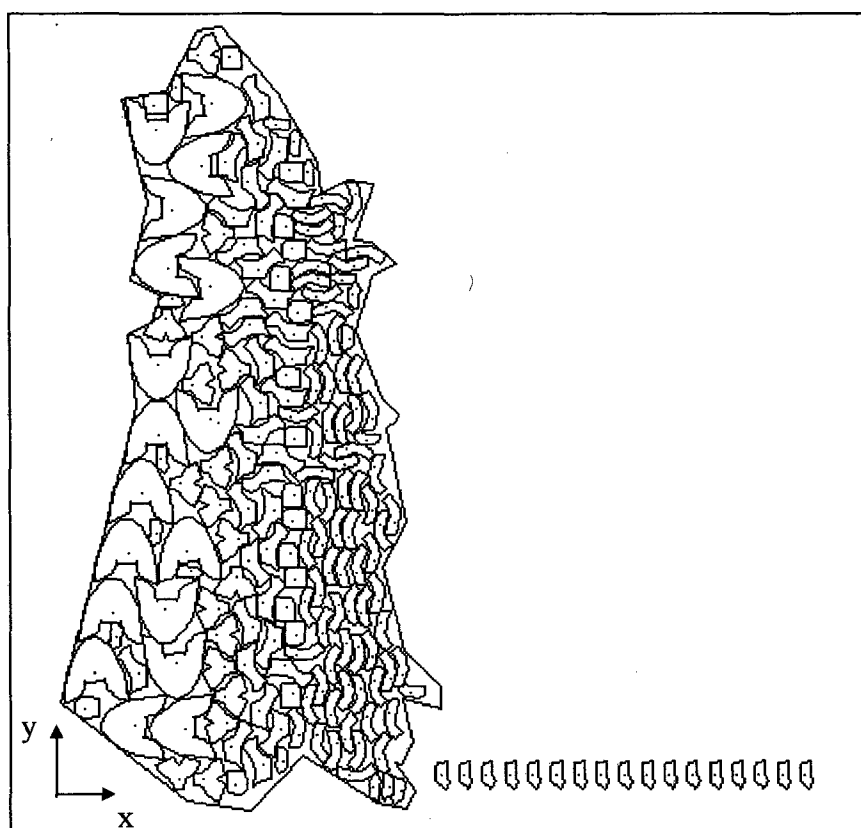


Figura 5.15 - Teste para encaixar 198 peças - 68,2%

Estes dois exemplos de encaixe ilustram perfeitamente o impasse entre obter maior número de pares de sapatos e o de obter maior rendimento de encaixe. O encaixe de 176 peças produz 8 pares completos e tem rendimento de encaixe baixo enquanto que o encaixe com 198 peças só produz um sapato completo e tem um rendimento de encaixe melhor. Em ambos os encaixes, as peças foram ordenadas pela área, mas para garantir a produção de pares de sapatos completos seria necessário aplicar um outro tipo de ordenação. Este novo tipo de ordenação procuraria colocar uma seqüência de inserção para garantir um bom rendimento de encaixe e obter um número mínimo de pares completos.

5.4 - Testes de Encaixe com Furos ou Áreas Defeituosas

Aqui são mostrados os resultados de encaixes obtidos em infestos com áreas de falhas ou furos, onde prioritariamente as peças selecionadas para o encaixe não podem sobrepor. Estas regiões foram determinadas e posicionadas aleatoriamente. Num processo produtivo, a escolha do couro e os processos de inspeção determinam as áreas úteis sobre uma peça.

A primeira parte dos testes é para definir a orientação do infesto que fornece o melhor rendimento de encaixe, a segunda parte consiste em melhorar o rendimento de encaixe pelo aumento do número de orientações por peça a ser encaixada.

As regiões que não devem ser sobrepostas são mostradas em preto na figura 5.16.

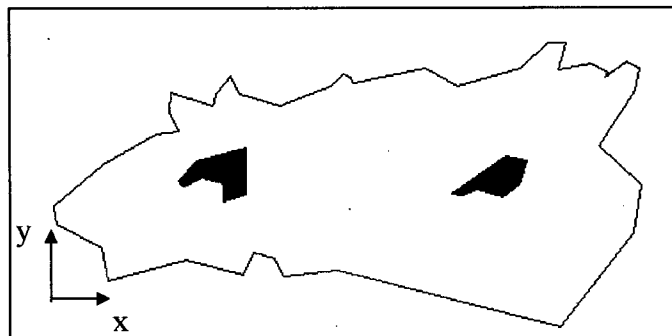


Figura 5.16 - Infesto com as áreas defeituosas já marcadas.

O cálculo do rendimento de encaixe considera somente a área útil do infesto que é a área total do infesto subtraindo-se as áreas das regiões defeituosas. O infesto mostrado na figura 5.16 será usado para obter uma lista de testes para determinar a melhor orientação do infesto. A ordem de inserção das peças é feito pela área e o número de orientações por peça são quatro: 0° , 90° , 180° e 270° . Os resultados são mostrados na tabela 5.8.

Tabela 5.8 - Resultados de acordo com a orientação do infesto.

Ângulo do Infesto	Número de peças encaixadas	Tempo de processamento	Número de Pares	Rendimento (%)
0°	152	12 min	0	66,7
30°	148	9 min	0	66,5
60°	148	9 min	0	66,2
90°	144	13 min	0	66,1
120°	147	9 min	0	66,4
150°	149	9 min	1	66,4
180°	143	11 min	0	65,5
210°	144	8 min	0	65,4
240°	143	8 min	0	66,6
270°	155	14 min	1	67,9
300°	147	9 min	0	65,6
330°	150	8 min	1	66,6

Novamente, o infesto com orientação de 270° fornece o melhor rendimento, de acordo com a figura 5.17. Este encaixe é visto na figura 5.18 cujo rendimento foi de 67,9 % e foram inseridas 155 peças.

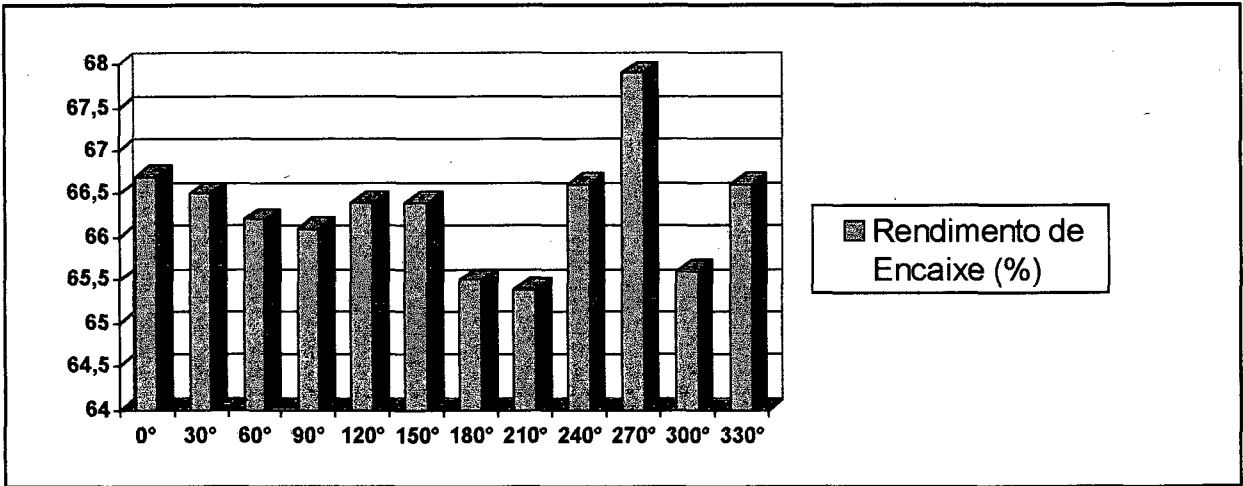


Figura 5.17 - Histograma relacionando ângulo do infesto com rendimento de encaixe.

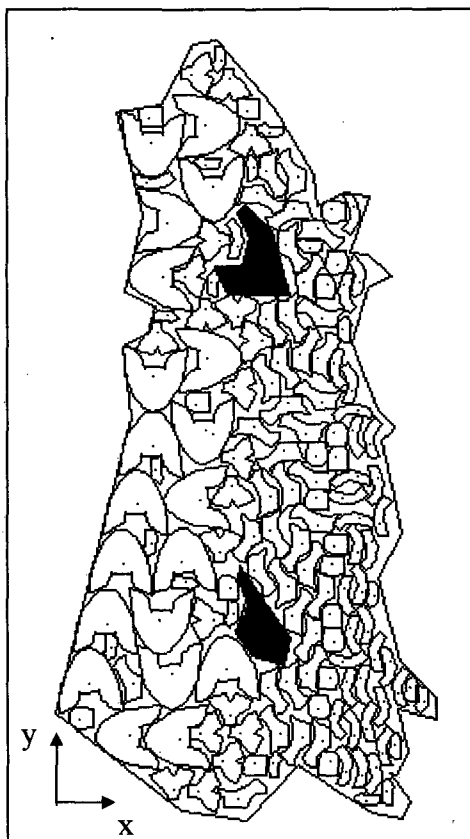


Figura 5.18 - Melhor encaixe com o infesto na orientação de 270° - 67,9%.

A tabela 5.9 mostra os resultados da segunda parte dos testes os quais consistem no aumento do número de orientações por peça.

Tabela 5.9 - Resultados pelo número de orientações com regiões defeituosas.

Ângulo Incrementado (rot)	Número de orientações de cada peça.	Tempo (min)	Número de Pares	Rendimento de Encaixe (%)
60°	6	20	0	68,8
50°	7	22	0	66,5
45°	8	25	0	67,9
40°	9	28	2	67,9
35°	10	31	0	67,6
30°	12	37	0	68,2
25°	14	44	0	69,7
20°	18	53	0	69,4
15°	24	70	0	68,8
10°	36	108	0	70,2
5°	72	221	0	70,5
1°	360	1038	0	71,3

A figura 5.19 mostra o gráfico do rendimento de encaixe relacionado com o número de orientações, enquanto que a figura 5.20 mostra o tempo de processamento relacionado com o número de orientações por peça.

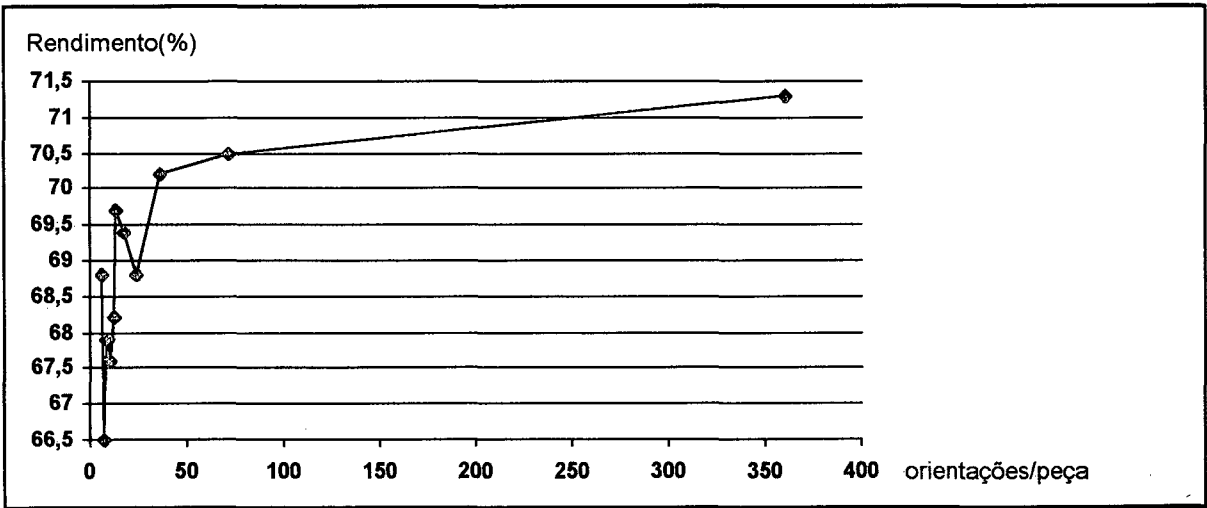


Figura 5.19 - Rendimento de encaixe relacionado com o número de orientações.

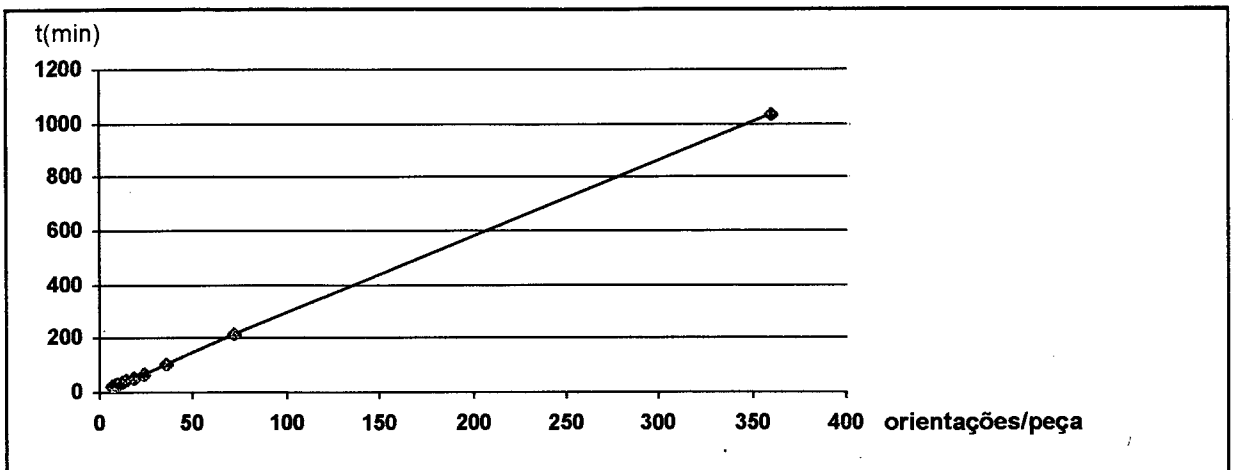


Figura 5.20 - Tempo de processamento relacionado com o número de orientações por peça.

Na figura 5.21 mostra o encaixe de melhor rendimento cujas propriedades são de 360 orientações por peça e o tempo de processamento de 1038 min.

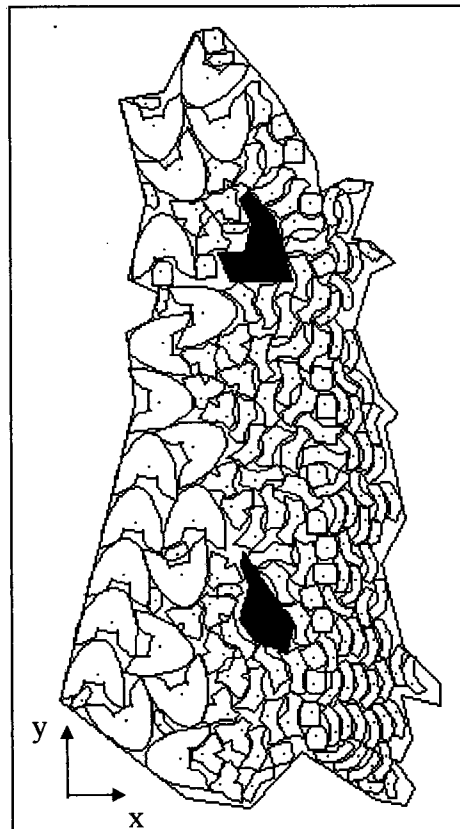


Figura 5.21 - Encaixe de melhor rendimento - 71,3%.

5.5 - Testes de Encaixe de Moldes em Áreas Pré-definidas.

Nesta parte deste capítulo será mostrado os testes com encaixe de peças em áreas pré-definidas. Esta rotina foi explicada no item 4.4.4. Antes de começar o procedimento de encaixe, as peças a serem encaixadas em áreas específicas devem possuir na suas respectivas estruturas de dados um código identificando a área que as mesmas devem ser encaixadas. Outro passo a ser dado é marcar as áreas de encaixe no infesto e identificá-las com os códigos correspondentes aos definidos na estrutura de dados das peças.

A figura 5.22 mostra o infesto antes de começar procedimento de encaixe com os moldes a serem encaixados em áreas pré-definidas. Os moldes que não tem uma área específica de encaixe, são colocadas em qualquer parte do infesto. As orientações testadas para cada peça foram 0° e 180° . As peças foram ordenadas pela área na momento da inserção.

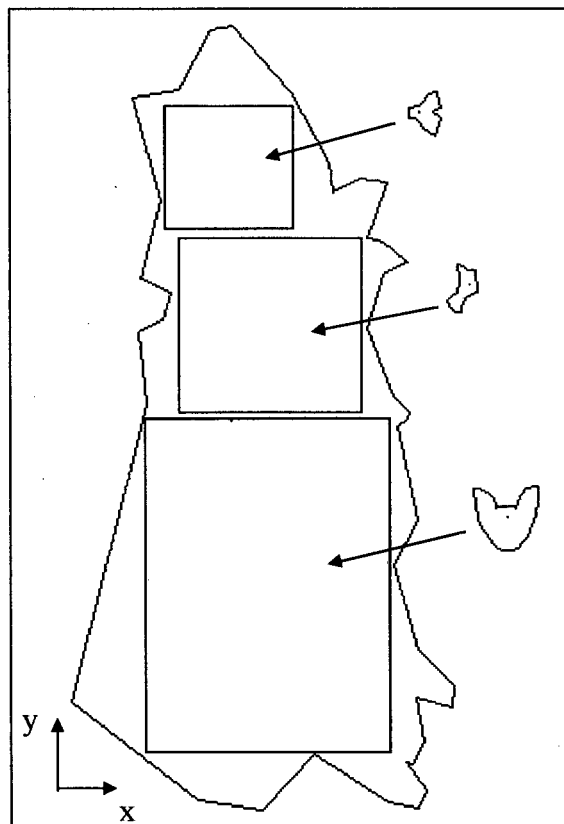


Figura 5.22 - Infesto preparado antes do procedimento de encaixe.

A figura 5.23, mostra o resultado do encaixe onde é possível ver os três tipos de moldes encaixados nas suas respectivas regiões de encaixe. Outra observação é o fato que as áreas pré-definidas não é grande o suficiente para comportar toda a demanda de seu respectivo molde. Os moldes menores que não tinham uma área pré-definida de encaixe, foram todos encaixados. O rendimento deste teste foi de 65,1% e o tempo de processamento foi de 6 min.

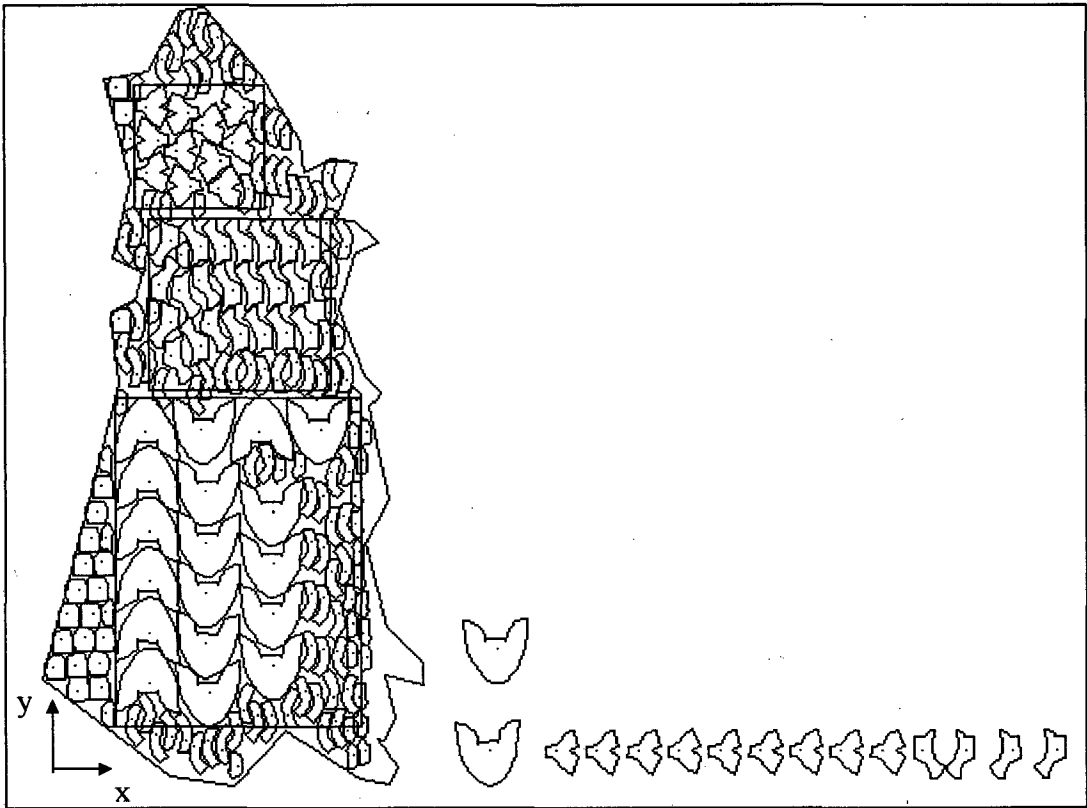


Figura 5.23 - Primeiro teste de encaixe com áreas pré-definidas, rendimento: 65,1%.

Foi feito um segundo teste, mas desta vez as áreas de encaixe foram aumentadas com objetivo de encaixar maior número de peças. A figura 5.24 mostra como o infesto foi preparado para o segundo teste.

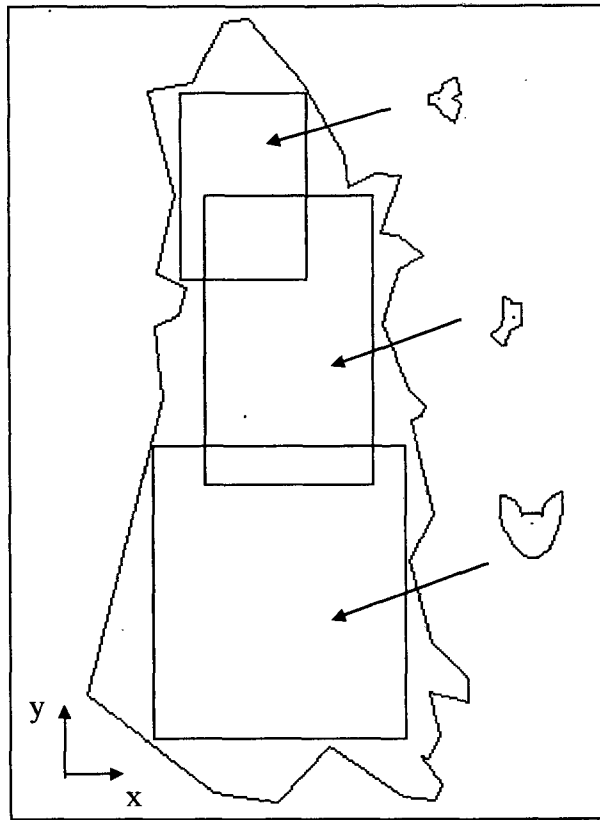


Figura 5.24 - Infesto preparado para o segundo teste.

A figura 5.25 mostra o encaixe resultante do segundo teste. O rendimento de encaixe, 66,7%, foi maior comparando-se com o primeiro e o tempo de processamento foi o mesmo.

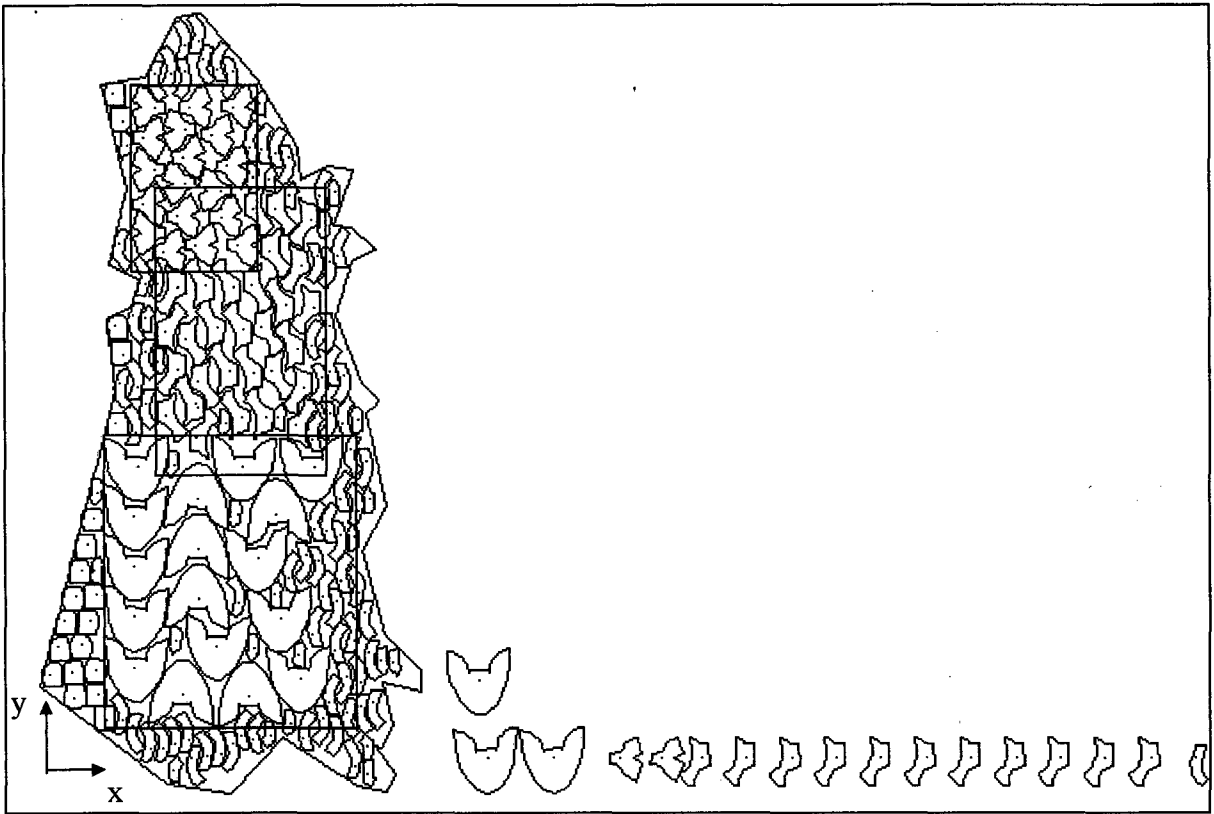


Figura 5.25 - Segundo teste de encaixe com áreas pré-definidas, rendimento: 66,7%.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A partir dos testes de encaixe realizados nesta dissertação, identifica-se alguns fatores que influenciam nos valores dos rendimentos e no tempo de processamento. Os fatores que foram considerados mais importantes foram:

1 - Tipo de ordenação aplicado numa coleção de peças a serem encaixadas:

- Para a coleção de moldes utilizados neste trabalho, os melhores resultados foram obtidos através da ordenação pela área do que pelo comprimento vertical.

2 – Definição do melhor ângulo de preenchimento do infesto:

- Os testes com o infesto nos ângulos de 180° e 300° , tabela 5.3, tiveram o mesmo rendimento de encaixe, devido ao fato que as peças menores do infesto na orientação de 180° ocuparam a mesma área das peças maiores do infesto na orientação de 300° .
- O infesto na orientação de 120° não fornece o melhor rendimento de encaixe, no entanto, possibilita obter bons resultados em tempos de processamento menores, mesmo trocando o tipo de ordenação de inserção.
- Os melhores resultados de encaixe foram obtidos no ângulo de 270° em relação a orientação inicial, mesmo trocando os tipos de ordenação de peças. O melhor resultado com ordenação pela área foi 68,4% e o tempo de processamento foi 15 min. Para ordenação pelo comprimento vertical, o rendimento foi 67,9% e o tempo foi de 16 min.

3 – Variação nas rotações das peças:

- Observando os gráficos das figuras 5.11 e 5.19, os testes de 4 a 36

orientações por peça não asseguram um crescimento contínuo de rendimento a medida que aumenta o número de orientações. A partir de 36 orientações por peça o rendimento apresenta um crescimento suave.

- O tempo de processamento aumenta proporcionalmente com o aumento do número de orientações por peça.
- O melhor resultado obtido foi 72,3% e o tempo de processamento foi 1140 min (19 horas).

4 - Número de pares de sapatos completos:

- A ordenação das peças pela área pode assegurar bons rendimentos de encaixe, no entanto não garantem uma demanda mínima de produção de pares de sapatos completos.
- O teste que obteve maior número de pares completos foi da figura 5.14. O rendimento de encaixe foi relativamente baixo (62,6%) uma vez que o infesto não foi completamente preenchido.

5 - Infestos com regiões defeituosas ou furos:

- O infesto na orientação de 270° , com regiões defeituosas marcadas, apresentou o melhor encaixe - 67,9%.
- Mantendo o infesto na orientação de 270° e aumentando o número de orientações por peça, o rendimento máximo obtido foi 71,3%. O tempo de processamento foi de 1038 minutos.

6 - Encaixe de peças em áreas pré-definidas:

- Colocação de peças específicas em áreas pré-definidas de encaixe não possibilitam bons rendimentos, no entanto, atendem requisitos práticos da indústria calçadista.
- O rendimento de encaixe é sensível às modificações das dimensões das áreas pré-definidas. Aumentando-se as áreas de encaixe, o rendimento de encaixe melhora.

7 - Recursos de encaixe disponíveis no programa:

- O programa de encaixe em contorno não convexo dispõe de outro recurso para encaixar peças. Este recurso consiste em selecionar e posicionar peças usando o *mouse*. O usuário pode movimentar peça selecionada dentro do infesto até encontrar uma posição sem sobreposição. Encontrada a posição de encaixe, a peça pode ser classificada pelo usuário como peça já encaixada. Após este procedimento, é feito o cálculo do rendimento de encaixe com a peça recém inserida.
- O usuário pode rotacionar e espelhar a peça.

Observando os resultados obtidos e a revisão bibliográfica são feitas as seguintes sugestões:

1 - Aplicação de estratégias de encaixe:

Baseando-se no método de encaixe por árvores abordadas nas referências [12], [6], as peças poderiam ser organizadas em grupos. Primeiramente, encaixa-se um grupo em uma região e calcula-se o rendimento de encaixe. Na mesma região, encaixa-se um segundo grupo de peças e novamente calcula-se o rendimento de encaixe. Isto é feito com todos os grupos. O encaixe definitivo será com o grupo de melhor rendimento. O restante das peças seriam novamente organizados em grupos e testados em uma região subsequente. Este processo se repetiria até que o infesto seja completamente preenchido.

2 - Para aumentar o número de pares de sapatos completos:

Para obter um maior número de pares de sapatos completos, as peças poderiam ser inseridas para completar um par por vez. Com este tipo de ordenação, talvez não seja possível garantir bom aproveitamento do infesto. Portanto, sugere-se um estudo para verificar as vantagens em buscar maior rendimento de encaixe ou a maior produção de produtos completos.

3 - Melhoras no encaixe de figuras em áreas pré-definidas:

Sugere-se a criação de estratégias e heurísticas que permitam uma simulação

de encaixe de peças do mesmo tipo antes de definir as dimensões da área pré definida. Assim o programa poderá sugerir as dimensões do retângulo onde as peças de mesmo tipo serão inseridas.

Em resumo, nem sempre a melhor solução é aquela que atende às necessidades do setor produtivo. No entanto, para atender as demandas do setor produtivo, esta dissertação mostra que é possível obter encaixes automatizados, mesmo trabalhando com formas complexas, como regiões e peças com contornos não convexos.

Como continuação de pesquisas nesta área, sugere-se o desenvolvimento de algoritmos e o uso de novas heurísticas, para a inserção dinâmica de regiões de encaixes em couros. Paralelamente é necessário, o desenvolvimento de equipamentos e algoritmos de scanear de peças de couros (infestos) que atendam às necessidades do algoritmo desenvolvido neste trabalho.

Da mesma forma, faz-se necessário desenvolver um sistema de saída de dados que atenda as necessidades do processo produtivo. Este módulo de exportação de dados deverá ser tal, que o arquivo de encaixe possa ser lido por qualquer software de CAD e também usado pelos sistemas de CAM mais comuns na área de produção. Por, último, deve-se readaptar as metodologias usadas no software resultante desta dissertação, para o reaproveitamento de peças estampadas na indústria metal-mecânica.

APÊNDICE A

A.1 - FLUXOGRAMA GERAL DO ALGORITMO DE ENCAIXE EM UM CONTORNO NÃO-CONVEXO

Neste apêndice são mostrados os fluxogramas que constituíram o programa de encaixe de figuras não convexas e convexas em um contorno não convexo. O fluxograma geral do algoritmo de encaixe representa a rotina que gerencia os métodos de encaixe por intersecção de matrizes e deslizamento. O programa inicia com a preparação dos dados descrito no fluxograma A.2. Nesta parte do programa, os dados do infesto são colocados em primeiro na lista de figuras a serem inseridas. Assim, o infesto é identificado e inserido na matriz de bits antes de começar encaixar as peças. Para cada peça a ser inserida, calcula-se o número de orientações a serem testadas. Com uma orientação da peça, procura-se posicioná-la por intersecção de matrizes e depois encaixá-la por deslizamento. Este processo é repetido até que todas as orientações da peça sejam testadas. O desenho da peça, com sua respectiva orientação e a posição definitiva de encaixe, é inserido na matriz de bits.

No fluxograma da figura A.1 são chamados dois processos de posicionamento: intersecção de matrizes e deslizamento. O método de intersecção de matrizes é mostrado na figura A.3 e o método de intersecção de matrizes é detalhado nas figuras A.4, A.5, A.6.

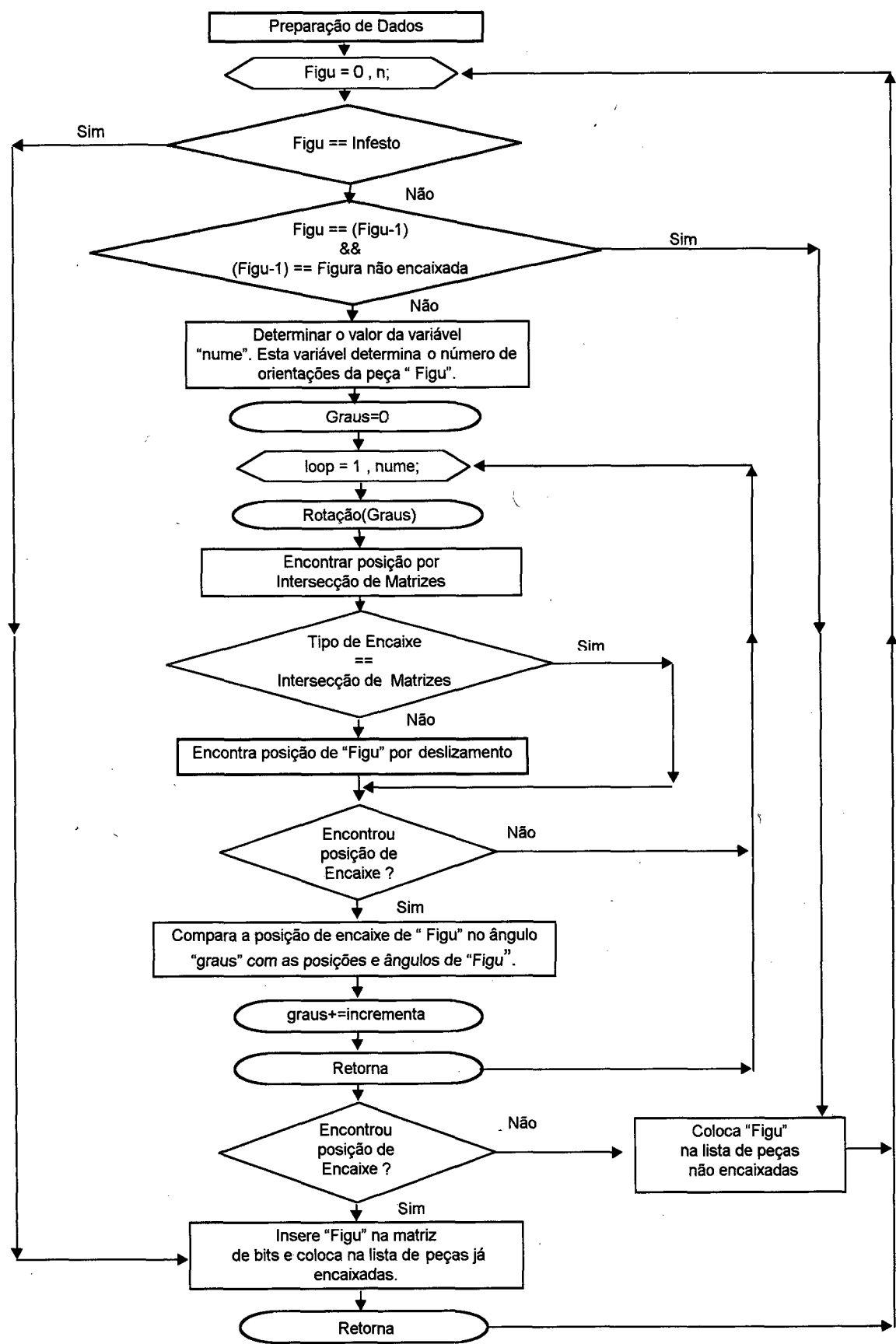


Figura A.1 - Fluxograma geral de encaixe.

A.2 - FLUXOGRAMA DE PREPARAÇÃO DADOS

A rotina de preparação de dados é constituído por duas partes. A primeira parte consiste na criação do arquivo com as peças digitalizadas ou desenhadas pelo *mouse*. Neste arquivo são armazenados os dados de cada figura como: coordenadas dos vértices, número de identificação, região em que a peça deve ser encaixada e restrições quanto as orientações. A segunda parte prepara os dados do arquivo antes do procedimento de encaixe tais como: propriedades de encaixe, determinação do tipo de ordenação, definir a figura que irá ser o infesto, definir figuras que representarão regiões defeituosas dentro do infesto, definir regiões específicas de encaixe para determinadas peças e selecionar o tipo de encaixe.

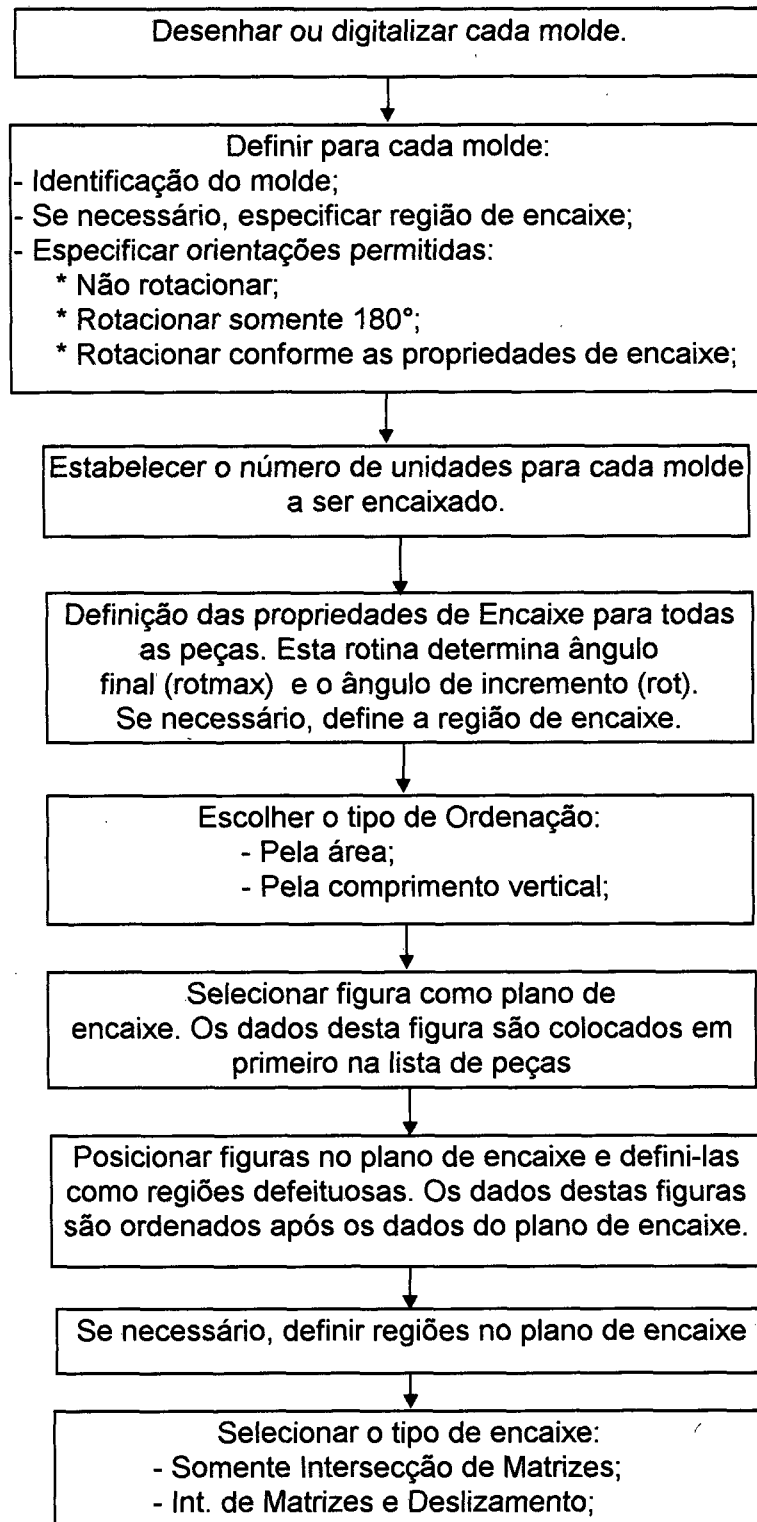


Figura A.2 - Fluxograma de preparação de dados.

A.3 - FLUXOGRAMA PARA INTERSECÇÃO DE MATRIZES

O encaixe por intersecção de matrizes baseia-se no uso de uma área discretizada. As dimensões desta área podem corresponder ao retângulo que envolve o infesto ou a uma região retangular dentro do infesto que serve para definir uma região específica de encaixe para um determinado tipo de peça. A largura da área discretizada é definida por um número inteiro X_{bitmax} e a altura, também número inteiro, corresponde a Y_{bitmax} . A peça é colocada no interior da região discretizada e percorre toda a área até encontrar uma posição de encaixe. Dentro desta rotina são feitos tres tipos de testes: verifica se o contorno da peça sobrepõe algum bit ocupado, verifica se existe intersecção no sistema de coordenadas mundo e se existe alguma figura no interior da peça a ser inserida. Se a posição testada passar por todos testes, a peça é colocada nesta posição e encaixada por deslizamento. Caso a posição seja rejeitada por algum dos testes, a peça é deslocada um incremento na direção y, repete-se todos os testes. A peça vai sendo deslocada na direção y até Y_{bitmax} e depois a peça é deslocada na direção x com y igual a $Y_{inicial}$. A peça vai sendo deslocada até encontrar uma posição de encaixe.

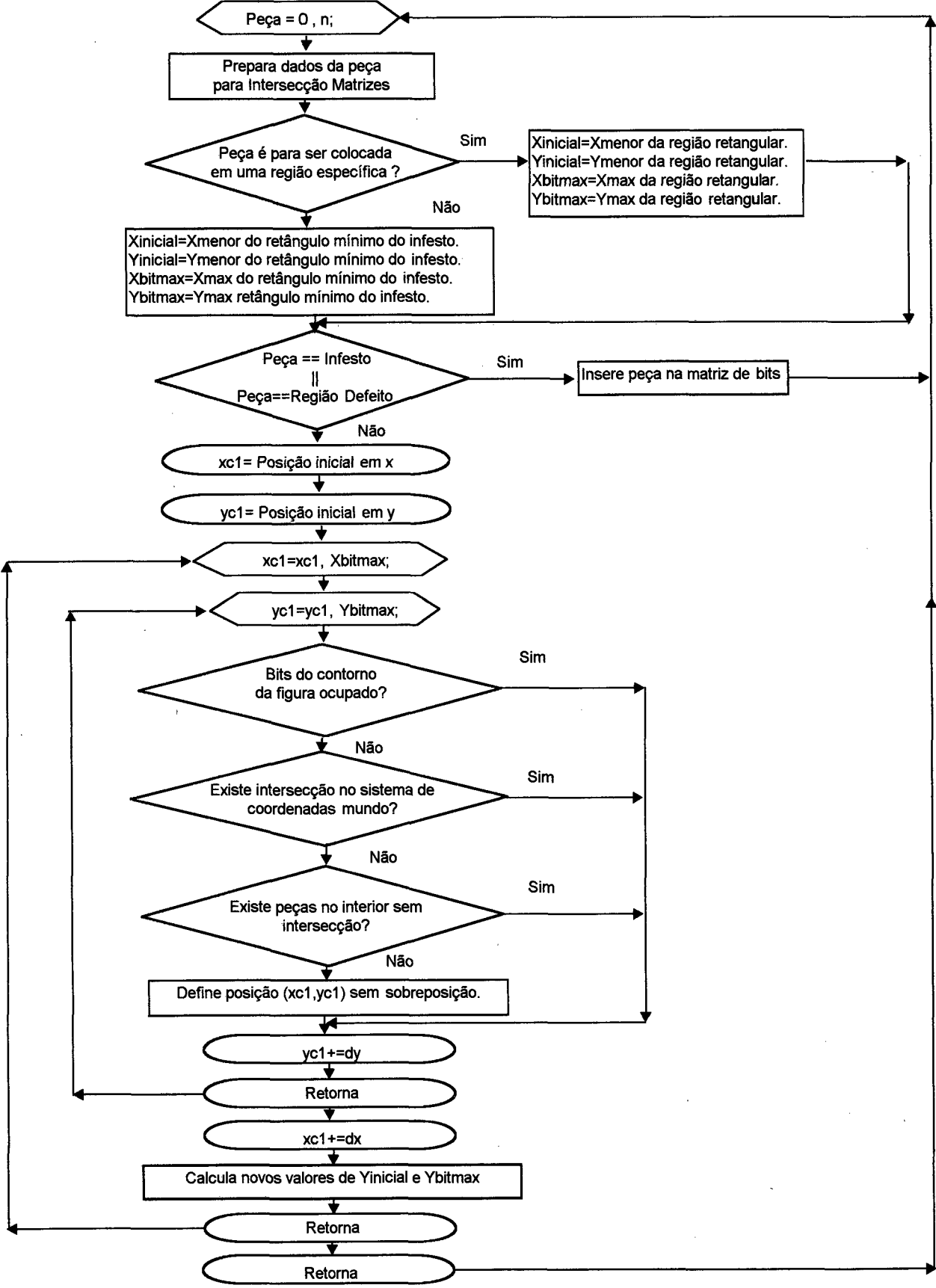


Figura A.3 - Fluxograma para intersecção de matrizes.

A.4 - FLUXOGRAMA DESLIZAMENTO

Uma vez definida a posição de encaixe por intersecção de matrizes, o próximo passo é deslizar a peça para junto das demais peças já encaixadas. As fronteiras de deslizamento podem ser o contorno do infesto ou o contorno de uma região específica onde a peça deve ser encaixada. A figura A.4 mostra as duas situações e ambos chamam a rotina de seleção de arestas interceptantes, mostrado na figura A.5.

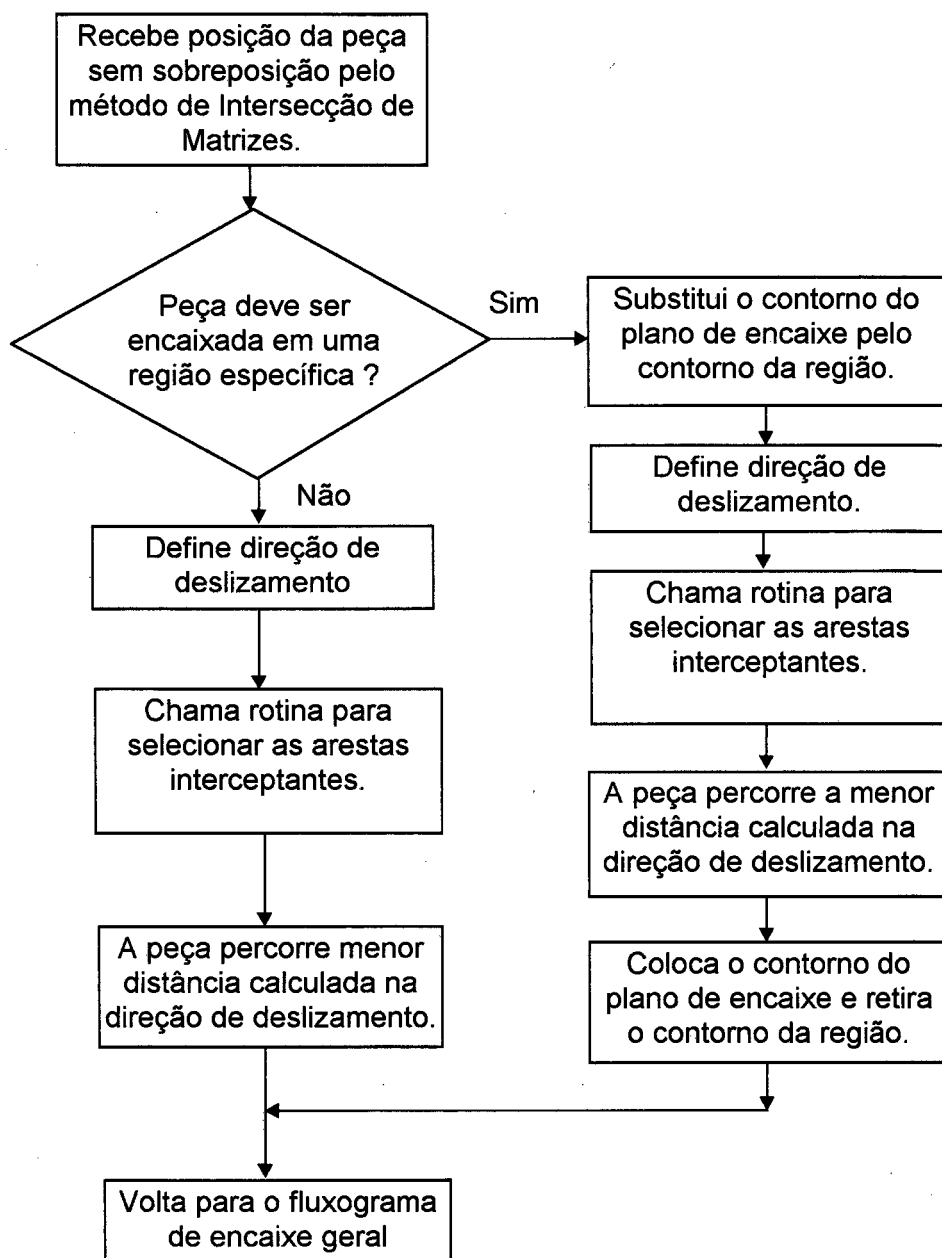


Figura A.4 - Fluxograma de deslizamento.

A.5 - FLUXOGRAMA SELEÇÃO DE ARESTAS E VÉRTICES INTERCEPTANTES.

Antes de executar o cálculo da menor distância, torna-se necessário definir vértices da figura deslizando que poderão interceptar as arestas das peças já encaixadas, da mesma forma, deve-se definir os vértices das peças já encaixadas que poderão interceptar as arestas da figura deslizando. Este procedimento é uma tarefa da rotina de seleção de arestas e vértices interceptantes, figura A.5. Nesta rotina, somente arestas e vértices interceptantes são enviadas para cálculo da menor distância de colisão. Este cálculo é feito baseado na técnica de Cyrus-Beck que é chamada em duas situações diferentes:

- Cálculo distância de colisão entre o vértice da figura deslizando com a aresta da peça já encaixada;
- Cálculo da distância de colisão entre o vértice da peça encaixada com a aresta da peça deslizando;

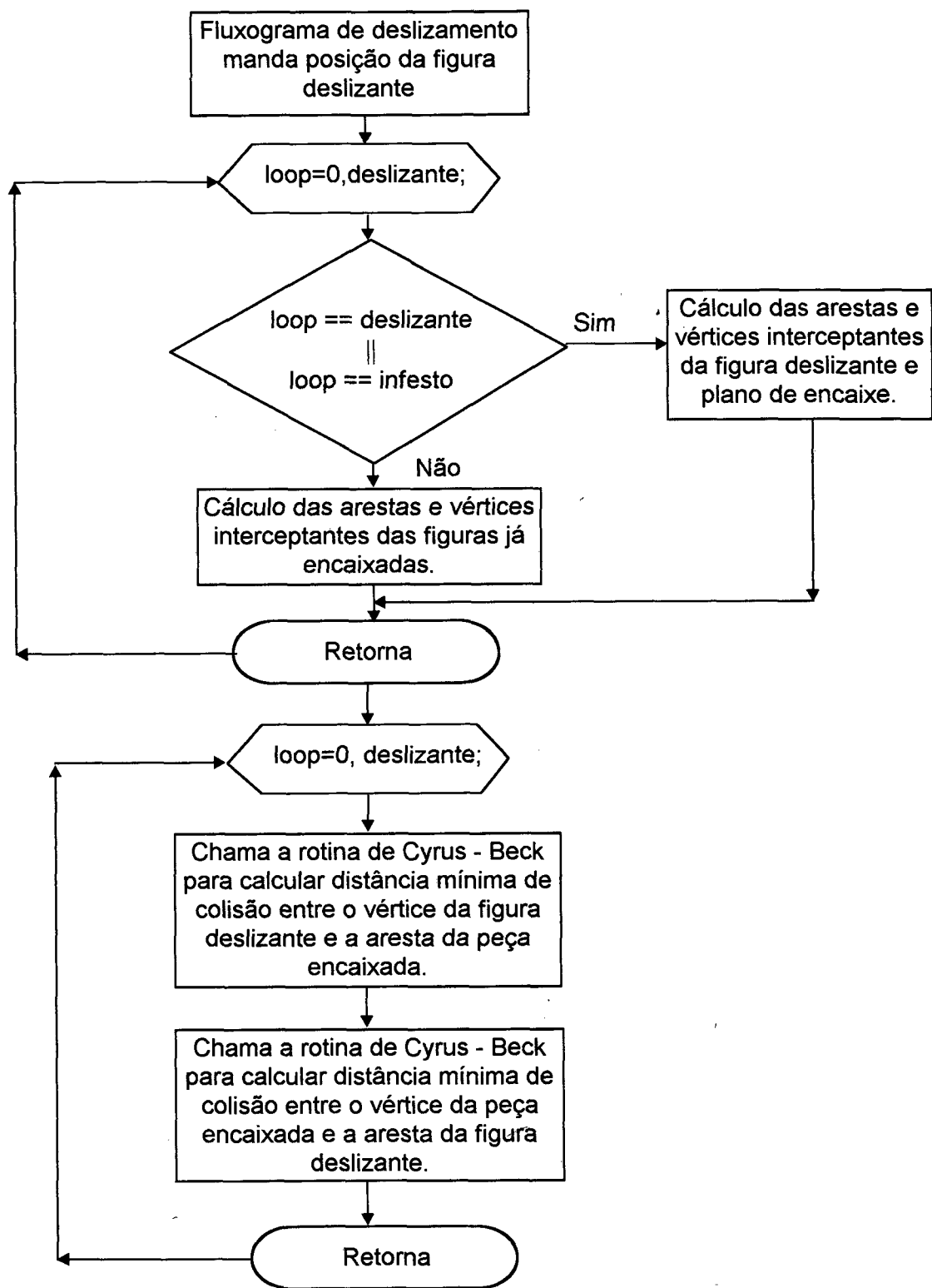


Figura A.5 - Fluxograma de seleção de arestas e vértices interceptantes.

A.6 - FLUXOGRAMA DA ROTINA BASEADA NA TÉCNICA CYRUS-BECK

A rotina baseada na técnica de Cyrus-Beck, mostrada na figura A.6, calcula a distância de colisão entre o vértice e a aresta na direção do vetor de deslocamento V . O resultado é comparado com a menor distância já calculada, definida pela variável *valor*. Se a variável *valor* for maior, a distância recém calculada será igual a *valor*. Uma vez que todos os vértices e arestas potencialmente interceptantes forem testados, a variável *valor* é determinada como menor distância de deslocamento sem intersecção.

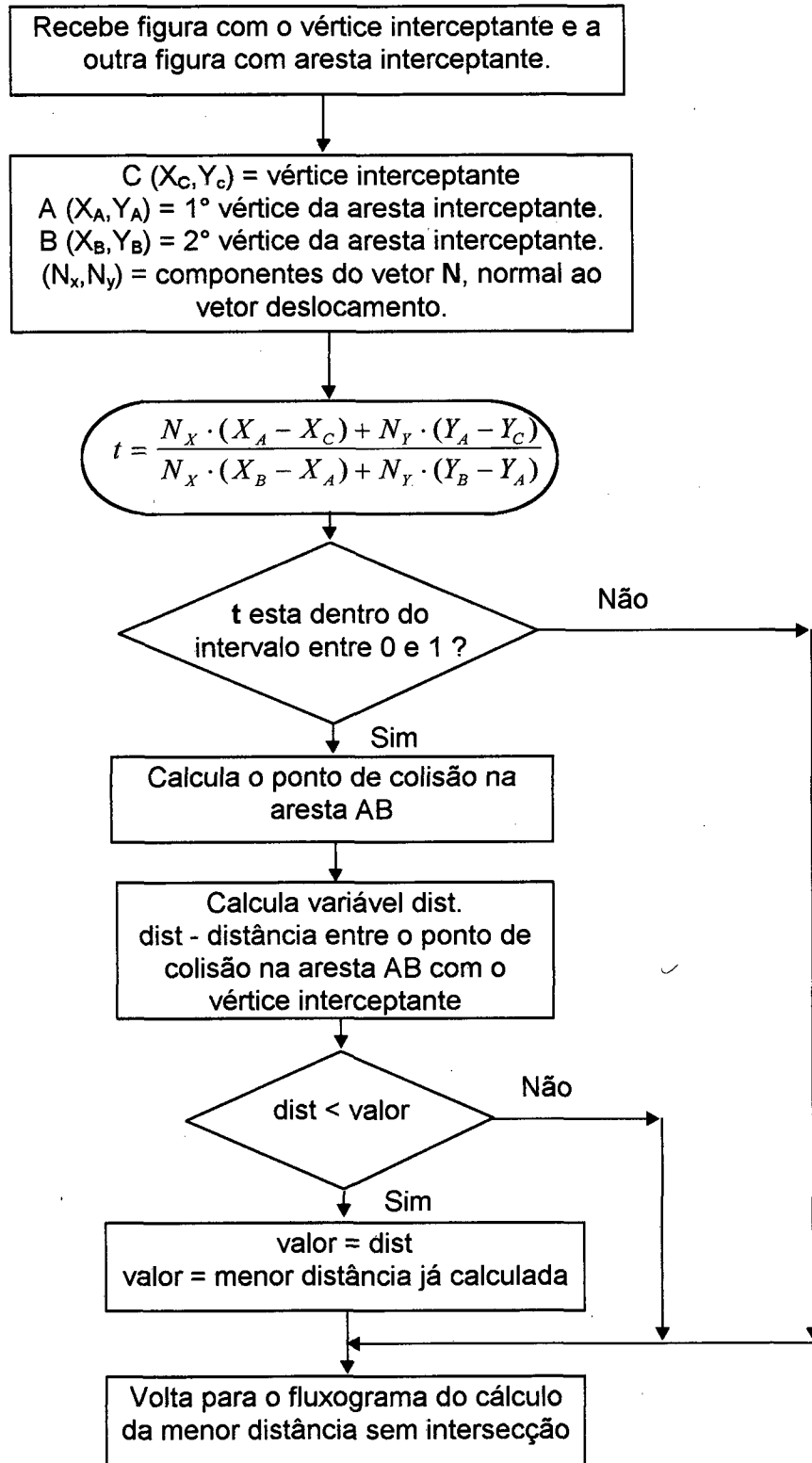


Figura A.6 - Fluxograma da rotina baseada na técnica de Cyrus-Beck.

APÊNDICE B

B.1 - DADOS GEOMÉTRICOS DAS PEÇAS E PLANO DE ENCAIXE

As próximas tabelas contêm as coordenadas dos vértices que formam o contorno das peças e do plano de encaixe. Como relata o item 2.2, os vértices são ordenados no sentido anti-horário e as suas coordenadas são armazenadas em relação a um ponto de referência interior P_i . A figura B.1 ilustra o ponto P_i de uma peça em relação ao sistema global. O ponto P_i situa o sistema de coordenadas local da peça em relação ao sistema global XY . A figura B.2 mostra sistema de coordenadas local $X'Y'$ da peça, pelo qual os vértices são posicionados para formar a peça. Além das coordenadas, as tabelas mostram o raio do círculo que circunscreve a peça. As coordenadas e raios são expressas em milímetros.

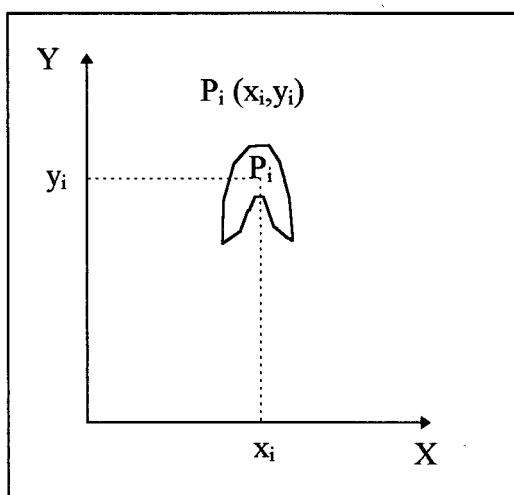


Figura B.1 - Sistema de coordenadas global.

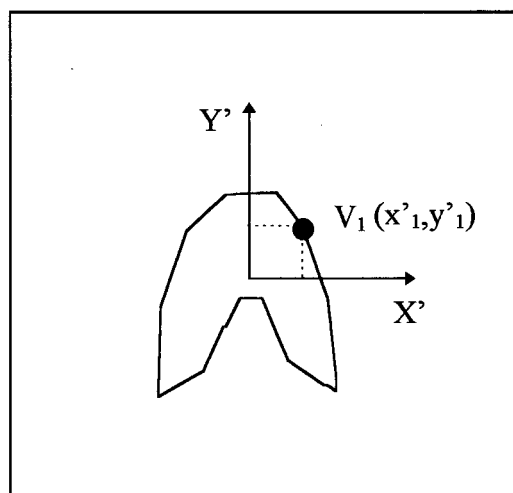


Figura B.2 - Sistema de coordenadas local da peça.

Tabela B.2 - Dados geométricos da gáspea.

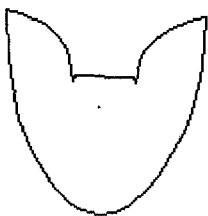
Moldes	Ponto Interno de Referência	Raio da figura (mm)	Número de vértices	Coordenadas dos vértices em relação P _i (mm)
<div><p>Gáspea</p></div>	888.68 400.62	138.54	35	<div><div>X</div><div>Y</div><div>0.46</div><div>-109.67</div><div>-17.10</div><div>-104.89</div><div>-28.10</div><div>-97.10</div><div>-43.30</div><div>-82.05</div><div>-52.91</div><div>-67.42</div><div>-66.71</div><div>-42.77</div><div>-78.51</div><div>-12.94</div><div>-83.57</div><div>8.86</div><div>-89.40</div><div>48.29</div><div>-90.02</div><div>96.44</div><div>-77.27</div><div>93.12</div><div>-62.74</div><div>87.59</div><div>-51.71</div><div>80.88</div><div>-40.16</div><div>70.03</div><div>-32.76</div><div>60.43</div><div>-28.03</div><div>50.00</div><div>-24.64</div><div>25.62</div><div>-22.21</div><div>30.60</div><div>35.99</div><div>28.04</div><div>36.91</div><div>22.93</div><div>41.17</div><div>46.70</div><div>47.44</div><div>57.76</div><div>57.23</div><div>66.98</div><div>68.65</div><div>74.27</div><div>80.89</div><div>80.52</div><div>91.92</div><div>84.29</div><div>107.20</div><div>88.66</div><div>102.60</div><div>39.81</div><div>94.64</div><div>1.98</div><div>86.83</div><div>-22.52</div><div>73.24</div><div>-47.74</div><div>58.82</div><div>-70.34</div><div>46.95</div><div>-85.05</div><div>31.61</div><div>-99.01</div><div>16.42</div><div>-106.86</div></div>

Tabela B.3 - Dados geométricos do Talão.


Moldes	Ponto Interno de Referência	Raio da figura (mm)	Número de vértices	Coordenadas dos vértices em relação P_i (mm)	
<div>Talão</div> 	792.73 317.25	85.28	22	X	Y
				66.89	-54.45
				14.41	-69.02
				0.54	-42.30
				-15.60	-68.52
				-68.15	-47.19
				-58.67	-29.45
				-52.87	-19.24
				-45.84	-12.92
				-36.17	-7.06
				-25.04	-0.38
				-19.44	8.49
				-16.00	18.27
				-13.33	32.33
				4.16	30.01
				18.53	30.44
				19.61	16.87
				22.17	8.15
				25.95	-0.39
				34.49	-8.11
				44.66	-14.39
				52.61	-22.63
				58.13	-31.62

Tabela B.4 - Dados geométricos da lateral e lingüeta.





Moldes	Ponto Interno de Referência	Raio da figura (mm)	Número de vértices	Coordenadas dos vértices em relação P _i (mm)	
<div>Lateral</div> 	762.82 429.82	93.04	23	X	Y
				-23.33	-86.57
				-40.96	-84.82
				-47.49	-80.45
				-53.12	-74.02
				-62.04	-60.28
				-67.60	-50.42
				-51.66	-37.42
				-43.25	-28.25
				-36.87	-16.03
				-30.75	-0.75
				-28.75	11.62
				-29.72	26.83
				-35.40	67.81
				-31.45	67.01
				-26.40	62.75
				-8.36	48.57
				-4.20	46.67
				22.66	43.79
				24.20	-21.21
				-3.16	-35.73
				-12.52	-44.79
				-19.81	-55.87
				-23.91	-70.39
<div>Lingüeta</div> 	619.79 444.32	54.82	13	24.50	-43.27
				-34.79	-43.09
				-37.09	-7.34
				-36.19	8.41
				-33.79	20.78
				-28.57	26.43
				-20.78	30.82
				-4.00	31.25
				12.14	29.00
				17.58	26.91
				22.14	20.75
				26.29	8.38
				26.58	-8.49

Tabela B.5 - Dados geométricos da banana e reforço.

Moldes	Ponto Interno de Referência	Raio da figura (mm)	Número de vértices	Coordenadas dos vértices em relação P _i (mm)	
Banana 	680.22 454.18	88.28	17	X	Y
				-36.77	-67.34
				-24.20	-52.97
				-16.41	-39.03
				-13.44	-26.09
				-14.99	-12.33
				-20.45	8.31
				-28.88	36.01
				-13.22	39.02
				2.75	37.14
				10.15	17.55
				15.44	-1.43
				18.53	-19.47
				17.32	-37.96
				12.33	-52.28
				3.84	-67.01
				-4.81	-78.06
				-15.04	-87.63
Reforço 	682.54 321.19	44.41	16	43.20	-10.25
				39.25	-13.40
				27.57	-18.68
				16.40	-21.79
				10.60	-21.45
				5.58	-19.99
				-26.83	-0.78
				-30.23	4.75
				-34.20	9.38
				-35.53	14.49
				-32.56	23.31
				-26.47	36.70
				10.15	14.19
				17.50	12.81
				21.38	13.97
				27.01	15.62

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] - ADAMOWICZ, M. - **The optimum two-dimensional allocation of irregular, multiply-connected shapes with linear, logical and geometric constraints**, Ph.D. Thesis, New York University, New York, 1969.
- [2] - ADAMOWICZ, M. - **Optimum allocation of two-dimensional shapes**, Proc. Int'l Design Automation Conf., Toronto, Canada, 1971.
- [3] - ADAMOWICZ, M. & A. ALBANO, **Nesting two-dimensional shapes in rectangular modules**, Computer Aided Design 8, nº 1, 27-33, 1976.
- [4] - ALBANO, A. - **A method to improve two-dimensional layout**, Computer-Aided Design, 9, nº 1, 48-52, 1977.
- [5] - ALBANO, A. & G. SAPUPPO - **Optimal Allocation of Two-Dimensional Irregular Shapes Using Heuristic Search Methods**, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 10, nº 5, 242-248, 1980.
- [6] - ARBEL, A. - **Large-Scale optimization methods applied to the cutting stock problem of irregular shapes**, International Journal of Production Research, 31, 483-500, 1993.
- [7] - BEASLEY, J.E. - **An Exact Two-Dimensional Non-Guilhotine Cutting Tree Search Procedure**, Operations Research, 33, 49-64, 1985.
- [8] - BERNARDO, J & J. JORGE - **Algoritmos para Colocação de Formas Irregulares**, XV Seminário de Soft e Hardware, Rio 1987.

- [9] - CASSELS, L.W. - **An Introduction to Geometry of Numbers** , Spring - Verlag, 1959.
- [10] - CHRISTOFIDES, N. & C. WHITLOCK - **An Algorithm for Two-Dimensional Cutting Problems**, Operations Research, 25, 30-44, 1977.
- [11] - CYRUS, M. & J. BECK - **Generalized Two- and Three-Dimensional Clipping**, Computer and Graphics, 3, nº 1, 23-28, 1978.
- [12] - DIAS, A. - **Encaixe Geral de Figuras Planas**, Tese Doutorado, PUC - RJ, 1991.
- [13] - DIAS, A. & S.A. SEGENREICH - **Uma Contribuição ao Problema de Encaixe no Plano**, XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília, Brasil, 1993.
- [14] - DIAS, A. & C.A.C. VINADÉ - **Problema de Encaixe de Figuras Não Convexas em um Contorno Não Convexo**, VII Congresso Nacional de Ingenieria Mecanica, Valdivia, Chile, 1996.
- [15] - DIAS, A. & C.A.C. VINADÉ - **Uma Proposta para o Encaixe de Figuras Não Convexas numa Área Não Convexa**, XVI Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Piracicaba, Brasil, 1996.
- [16] - FOLEY, J.D.; A. VAN DAM; S.K. FEINER; J.F. HUGHES - **Computer Graphics: Principles and Practice**, 2nd Edition in C, Addison Wesley, 1996.
- [17] - GILMORE, P.C. & R.C. GOMORY - **A linear programming approach to the cutting stock problem**, Operations Research, 9, 724-746, 1961.

- [18] - GILMORE, P.C. & R.C. GOMORY - **A linear programming approach to the cutting stock problem. Part II**, Operations Research, 11, 863-888, 1963.
- [19] - GILMORE, P.C. & R.C. GOMORY - **Multi stage cutting stock problems of two and more dimensions**, Operations Research, 13, 94-120, 1965.
- [20] - GRAHAM, R.L. & F.F. YAO - **Finding the Convex Hull of a Simple Polygon**, Journal of Algorithms, 4, 324-331, 1983.
- [21] - HAESLER, R.W. - **A Heuristic Programming to a Non-Linear Cutting Stock Problem**, J. Management Science, 17, B783-B802, 1968.
- [22] - HAESSLER, R.P. & SWEENEY, P.E. - **Cutting Stock Problems an Solution Procedures**, European Journal of Operational Research, 54, 141-150, 1991.
- [23] - HAIMS, M.J & H. FREEMAN - **A multistage solution to the template layout problem**, IEEE Transactions in Systems, Science and Cybernetics, SEC-6, 145-151, 1970.
- [24] - LEE, H.C. & T.C. WOO - **Determining in Linear Time the Minimum Area Convex Hull of Two Polygons**, IIE Transactions, 20, nº 4, 338-345, 1988.
- [25] - MADSEN, O.B.G. - **An Application of Travelling-Salesmann Routines to Solve Pattern-Allocation Problems in Glass Industry**, J. of Operational Research Society, 39, nº 3, 249-256, 1988.
- [26] - PRASAD, Y.K.D.V.; S. SOMASUNDARAM; K.P. RAO - **A sliding algorithm for optimal nesting of arbitrarily shaped sheet metal blanks**, International Journal of Production Research , 33, nº 6, 1505-1520, 1995.

- [27] - ROGERS, C.A. - **Packing and Covering**, Cambridge University Press, Cambridge, 1964.
- [28] - SAATY, T.L. - **Optimization in Integers and Related External Problems**, McGraw-Hill B.C., 1970.
- [29] - SEGENREICH, S.A. - **Optimal Nesting of Planes Figures**, Second International Conference on Computer Aided Design Production Engineering, University of Edinburgh, Edinburgh, 1987a.
- [30] - SEGENREICH, S.A. - **Preenchimento de Áreas Poligonais por um método Trapezoidal**, Comunicação Privada, 1988.
- [31] - SEGENREICH, S.A. & L.M.P.F. BRAGA - **Optimal Nesting of General Plane Figures: A Monte Carlo Heuristical Approach**, Computers and Graphics, 10, nº 3, 229-237, 1987b.
- [32] - TÓTH, G.F. - **New Results in the Theory of Packing and Covering its Applications**, Birkhäuser, 318-359, 1983.
- [33] - VAN ACKEN, J.R. & KILLEBREW JR, C.R. - **Better Bit-Mapped Lines**, Byte, 13, nº 3, 249 - 253, 1988.
- [34] - WANG, P.Y. - **Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems**, Operation Research, 31, 573-586, 1983.